Compito FIS A1 19/09/05

Esercizio 1: Un punto materiale si muove con velocità angolare constante pari a 1.90 Rad/s lungo una traiettoria descritta dalla relazione r =0.730 m $\exp\frac{b\theta}{2\pi}$, con b=3.00 Rad^{-1}. All'istante iniziale, si ha $\theta = 0$. Dopo 1.70 s determinare:

1. il modulo della velocità istantanea (5,0)
   $|v|$ [m/s] = $\boxed{7.19}$ A $\boxed{7.19}$ B $\boxed{2.55}$ C $\boxed{45.7}$ D $\boxed{2.99}$ E $\boxed{5.85}$
2. il modulo dell'accelerazione istantanea (5,0)
   $|a|$ [m/s^2] = $\boxed{15.1}$ A $\boxed{5.15}$ B $\boxed{15.9}$ C $\boxed{74.4}$ D $\boxed{6.90}$ E $\boxed{15.1}$
3. il raggio di curvatura della traiettoria (5,0)
   R [m] = $\boxed{3.78}$ A $\boxed{28.5}$ B $\boxed{3.78}$ C $\boxed{23.2}$ D $\boxed{18.4}$ E $\boxed{0.730}$

$$r(\theta) = r_0 \, e^{\frac{b\theta}{2\pi}}$$

$$\theta(t) = \omega t$$

1) $$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\dot{r} = r_0 \frac{b}{2\pi} e^{\frac{b\theta}{2\pi}} \dot{\theta} = r_0 \frac{b\omega}{2\pi} e^{\frac{b\theta}{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = r_0 \frac{b\omega}{2\pi} e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \hat{e}_r + r_0 e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \omega_0 \hat{e}_\theta$$

$$|\vec{v}|^2 = r_0^2 \omega^2 e^{\frac{b\omega t}{\pi}} \left(1 + \frac{b^2}{4\pi^2}\right)$$

$$|\vec{v}| = r_0 \omega \, e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \sqrt{1 + \frac{b^2}{4\pi^2}}$$

2) $$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (\cancel{r\ddot{\theta}} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta$$

$$\ddot{r} = r_0 \frac{b\omega}{2\pi} \dot{\theta} \frac{b}{2\pi} e^{\frac{b\theta}{2\pi}} = r_0 \frac{b^2\omega^2}{4\pi^2} e^{\frac{b\omega t}{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = r_0 \omega^2 e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \left(\frac{b^2}{4\pi^2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 = r_0^2 \omega^4 e^{\frac{b\omega t}{\pi}} \left(1 + \frac{b^4}{16\pi^4} - \frac{b^2}{2\pi^2}\right)$$

$$+ 4 r_0^2 \frac{b^2\omega^4}{4\pi^2} e^{\frac{b\omega t}{\pi}} = r_0^2 \omega^4 e^{\frac{b\omega t}{\pi}} \left(1 + \frac{b^4}{16\pi^2} + \frac{b^2}{2\pi^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}| = r_0 \omega^2 e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \left(1 + \frac{b^2}{4\pi^2}\right)$$

3) $$\vec{a} = \hat{e}_r \, r_0 \omega^2 e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \left(\frac{b^2}{4\pi^2} - 1\right) + \frac{2 r_0 b \omega^2}{2\pi} e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \hat{e}_\theta$$

$$= \frac{dv}{dt} \hat{T} + \frac{v^2}{R} \hat{N}$$

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\hat{e}_r \, \cancel{r_0}\frac{\cancel{\omega} b}{2\pi} \cancel{e^{\frac{b\omega t}{2\pi}}} + \hat{e}_\theta \, \cancel{r_0} \cancel{\omega} \cancel{e^{\frac{b\omega t}{2\pi}}}}{\cancel{r_0} \cancel{\omega} \cancel{e^{\frac{b\omega t}{2\pi}}} \sqrt{1 + \frac{b^2}{4\pi^2}}}$$

$$= \left(\frac{b}{2\pi} \hat{e}_r + \hat{e}_\theta\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{4\pi^2}}}$$

$$\dot{v} = r_0 \omega \sqrt{1 + \frac{b^2}{4\pi^2}} \; \frac{b\omega}{2\pi} e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} = r_0 \frac{b\omega^2}{2\pi} e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \sqrt{1 + \frac{b^2}{4\pi^2}}$$

$$\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{4\pi^2}}} \left(-\hat{e}_r + \frac{b}{2\pi} \hat{e}_\theta\right)$$

$$\Rightarrow \quad r_0 \omega^2 e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \left(\frac{b^2}{4\pi} - 1\right) \hat{e}_r + 2 r_0 \frac{\omega^2 b}{2\pi} e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \hat{e}_\theta =$$

$$= r_0 \frac{b\omega^2}{2\pi} e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \cancel{\sqrt{1 + \frac{b^2}{4\pi^2}}} \left(\frac{b}{2\pi} \hat{e}_r + \hat{e}_\theta\right) \frac{1}{\cancel{\sqrt{1 + \frac{b^2}{4\pi^2}}}}$$

$$+ r_0^2 \omega^2 e^{\frac{b\omega t}{\pi}} \left(1 + \frac{b^2}{4\pi^2}\right) \frac{1}{R} \left(-\hat{e}_r + \frac{b}{2\pi} \hat{e}_\theta\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{4\pi^2}}}$$

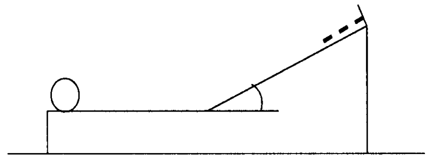
Dalla componente $\hat{e}_r$ (ma lo stesso risultato si ricava anche dalla componente $\hat{e}_\vartheta$)

$$\cancel{r_0 \frac{b\omega^2}{2\pi} e^{\frac{b\omega t}{2\pi}}} \frac{b}{2\pi} - r_0^{\cancel{2}} \cancel{\omega^2} e^{\frac{b\omega t}{\pi}} \sqrt{1+\frac{b^2}{4\pi^2}} \frac{1}{R}$$

$$= \cancel{r_0} \cancel{\omega^2} e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \left(\frac{\cancel{b^2}}{\cancel{4\pi}} - 1 \right)$$

$$R = r_0 e^{\frac{b\omega t}{2\pi}} \sqrt{1+\frac{b^2}{4\pi^2}}$$

Esercizio 2: Si consideri il sistema in figura: una guida è composta da un piano orizzontale, a cui è incollato un piano inclinato di 0.440 Rad. La guida ha massa pari a 3.30 kg. L'estremità più alta del piano inclinato dista dalla parte orizzontale della guida 0.500 m. Tale guida è a sua volta appoggiata su piano orizzontale liscio. All'estremità più alta della guida è attaccata una molla (rappresentata in figura da una linea tratteggiata) di costante elastica pari a 190 N/m e lunghezza a riposo pari a 0.190 m. Un blocchetto di massa 0.880 kg è appoggiato sulla parte orizzontale della guida. Si supponga che tra blocchetto e guida non ci siano attriti. Determinare:



1. il modulo della velocità iniziale che deve avere il blocchetto affinché arrivi a toccare l'estremità libera della molla senza comprimerla (5,0)
   v_0 [m/s] = $\boxed{3.26}$ A $\boxed{10.5}$ B $\boxed{4.97}$ C $\boxed{1.68}$ D $\boxed{3.26}$ E $\boxed{1.24}$

Si supponga adesso che il blocchetto abbia una velocità iniziale pari a 8.70 m/s. Quando la molla è lunga 0.0690 m, determinare:

2. il modulo della velocità della guida (5,0)
   $|V|$ [m/s] = $\boxed{0.393}$ A $\boxed{0.226}$ B $\boxed{0.168}$ C $\boxed{0.393}$ D $\boxed{0.587}$ E $\boxed{2.70}$
3. il modulo della forza di contatto tra la guida e il piano orizzontale (5,0)
   $|R|$ [N] = $\boxed{30.4}$ A $\boxed{16.9}$ B $\boxed{41.8}$ C $\boxed{9.52}$ D $\boxed{30.4}$ E $\boxed{72.1}$

1) Cons. dell' energia

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mg(h - l \sin\alpha) + \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v_f^2$$

Dalla condizione imposta dalla domanda:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_f' + \vec{V} = \vec{V}$$

Conserv. della q. d. m. lungo x

$$m v_0 = (M + m) V$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{m}{m+M} v_0$$

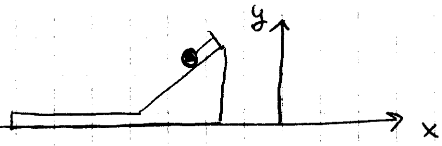
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = mg(h - l_0 \sin\alpha) + \frac{1}{2} \cancel{(m+M)} \frac{m^2}{(m+M)^{\cancel{2}}} v_0^2$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} v_0^2 \left(m - \frac{m^2}{m+M}\right) = \frac{2}{1} mg(h - l_0 \sin\alpha)$$

$$v_0^2 \frac{\cancel{m} M}{m+M} = 2 \cancel{m} g (h - l_0 \sin\alpha) \quad \Rightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{m+M}{M} g (h - l_0 \sin\alpha)}$$

2) Conserv. dell' energia



$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mg \overbrace{(h - l\sin\alpha)}^{\Delta h} + \frac{1}{2} m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{1}{2} M V^2$$

$$+ \frac{1}{2} k \underbrace{(l - l_0)}_{\Delta l}{}^2$$

$$\begin{cases} v_x = v_x' + V \\ v_y = v_y' \\ v_y' = v_x' \, tg\,\alpha \end{cases}$$

$$m v_0 = m v_x + M V = (m+M) V + m v_x'$$ Cons. q. di m. lungo x

$$\Rightarrow \quad v_x' = v_0 - \frac{m+M}{m} V$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 - \frac{M}{m} V \\ v_y = tg\,\alpha \left(v_0 - \frac{m+M}{m} V \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{\frac{1}{2} m v_0^2} = \overset{2}{1}\, mg\,\Delta h + \cancel{\frac{1}{2}}\, k\,\Delta l^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

$$+ \cancel{\frac{1}{2}}\, m \left(\cancel{v_0^2} + \frac{M^2}{m^2} V^2 - 2\frac{M}{m} v_0 V \right)$$

$$+ \cancel{\frac{1}{2}}\, m\, tg^2\alpha \left(v_0^2 + \frac{(m+M)^2}{m^2} V^2 - 2\frac{(m+M)}{m} v_0 V \right)$$

$$V^2 \left(M + \frac{M^2}{m} + \frac{(m+M)^2}{m} tg^2\alpha \right)$$

$$- 2 v_0 V \left(M + (m+M)\, tg^2\alpha \right)$$

$$+ \underbrace{2mg\,\Delta h + k\,\Delta l^2 + m v_0^2\, tg^2\alpha}_{E_0} = 0$$

$$V^2 \; \frac{1}{m} \left(M\,(m+M) + (m+M)^2\, tg^2\alpha \right)$$

$$- 2 v_0 V \left(M + (m+M)\, tg^2\alpha \right) + E_0 = 0$$

$$\frac{m+M}{m} \Big[M + \overbrace{(m+M)}^{M_t}\, tg^2\alpha \Big] V^2 - 2 V v_0 \left[M + (m+M)\, tg^2\alpha \right] + E_0 = 0$$

$$V = \frac{v_0 \left[M + M_t\, tg^2\alpha \right] \pm \sqrt{(M + M_t\, tg^2\alpha)^2 v_0^2 - \frac{M_t}{m} E_0 \,(M + M_t\, tg^2\alpha)}}{\frac{M_t}{m}\left(M + M_t\, tg^2\alpha \right)}$$

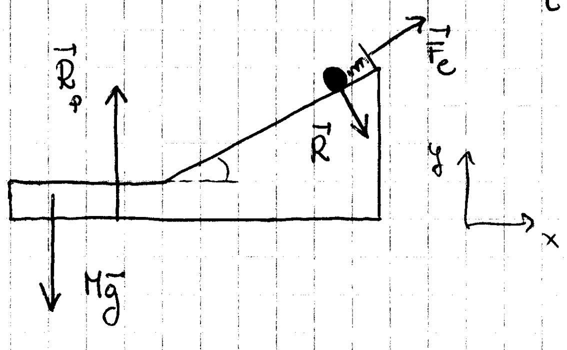
$$V = \frac{m}{M_t} v_0 \pm \frac{m}{M_t} \sqrt{v_0^2 - \frac{M_t E_0}{m\,(M + M_t\, tg^2\alpha)}}$$

questo è il segno corretto.

Infatti $V = \frac{m v_0}{M_t}$ quando m è ferma rispetto a M

altrimenti $V < \frac{m}{M_t} v_0$

3)

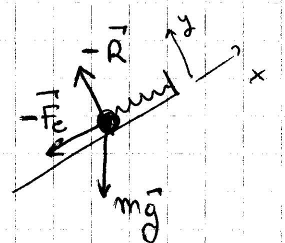


Forze su M

$$|\vec{F}_e| = k\,(\ell_0 - \ell)$$

$$M \vec{A} = M\vec{g} + \vec{R}_p + \vec{R} + \vec{F}_e \qquad M A_y = 0 = R_p - Mg - R\cos\alpha + F_e \sin\alpha$$

Su m:

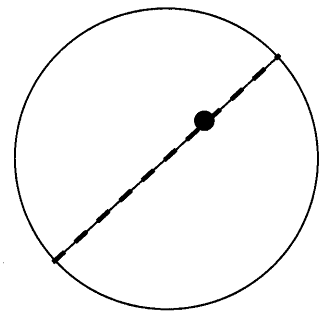


$$m\, a_y = 0 = R - mg\cos\alpha$$

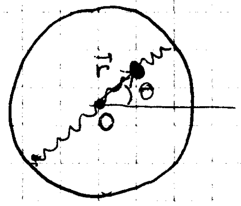
$$\Rightarrow R = mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow R_p = Mg + mg\cos^2\alpha - k\,(\ell_0 - \ell)\sin\alpha$$

Esercizio 1: Un disco omogeneo con momento d'inerzia pari a 0.560 kg m^2 può ruotare senza attrito intorno al proprio asse di simmetria posto nella direzione della verticale. Il disco possiede una scanalatura, che coincide con un diametro, lungo la quale può muoversi senza attrito una pallina di dimensioni trascurabili e massa pari a 1.80 kg. La pallina è collegata a due molle identiche di costante elastica pari a 22.0 N/m e massa trascurabile, con un estremo fisso sul bordo del disco. La lunghezza a riposo delle molle coincide con il raggio del disco. Nella figura le molle sono rappresentate da una linea tratteggiata. Si considera un sistema di riferimento assoluto, e si calcola il momento total della quantità di moto del sistema rispetto all'asse del disco.



1. Se il momento totale della quantità di moto del sistema è 8.80 kg m^2/s, determinare la distanza dal centro del disco a cui deve trovarsi la pallina per poter compiere un moto circolare uniforme (5,0)
   d [m] = $\boxed{0.823}$ A $\boxed{12.1}$ B $\boxed{0.823}$ C $\boxed{3.72}$ D $\boxed{6.88}$ E $\boxed{2.22}$
2. Se l'energia totale del sistema è 260 J e il momento totale della quantità di moto del sistema è 12.0 kg m^2/s, determinare la distanza massima dal centro a cui può giungere la pallina (5,0)
   d_{max} [m] = $\boxed{3.42}$ A $\boxed{31.3}$ B $\boxed{1.71}$ C $\boxed{17.8}$ D $\boxed{3.42}$ E $\boxed{1.27}$
3. Se il momento totale della quantità di moto del sistema è 16.0 kg m^2/s, determinare il minimo valore dell'energia meccanica del sistema affinché la pallina possa passare attraverso il centro del disco (5,0)
   E_{min} [J] = $\boxed{229}$ A $\boxed{1060}$ B $\boxed{325}$ C $\boxed{787}$ D $\boxed{229}$ E $\boxed{380}$



Cons. energia:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2$$

$$+ \frac{1}{2} k_0 r^2 + \frac{1}{2} k_0 r^2 \qquad k = 2k_0$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} (mr^2 + I_0) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k r^2$$

Cons. mom. ang.:

$$L_0 = (I_0 + mr^2)\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{L_0^2}{I_0 + mr^2} + \frac{1}{2} k r^2}_{U_{eff}(r)}$$

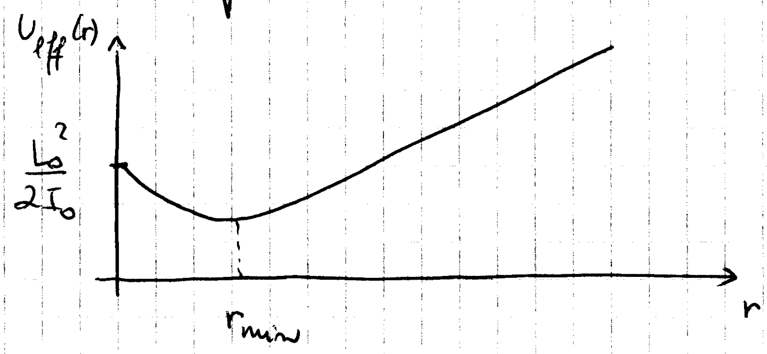
Studio di $U_{eff}(r)$ $\quad r \to \infty \quad U_{eff}(r) \to \infty$

$r = 0 \quad U_{eff}(0) = \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{I_0}$

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = kr + \frac{1}{\cancel{2}} L_0^2 \frac{(-1)}{(I_0 + mr^2)^2} \cancel{2} m r = 0$$

$$k - \frac{L_0^2 m}{(I_0 + mr^2)^2} = 0 \Rightarrow I_0 + mr^2 = \sqrt{\frac{m}{k} L_0^2}$$

$$\Rightarrow r_{min} = \sqrt{\left(L_0\sqrt{\frac{m}{k}} - I_0\right)\frac{1}{m}}$$



Moto circ. unif. $\Rightarrow$ $E = U_{eff}(r_{min})$

e $r_{circ} = r_{min}$

2) $$E_0 = \frac{1}{2}\frac{L_0^2}{I_0+mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 \qquad k = 2k_0$$

$$2E_0I_0 + 2E_0mr^2 = L_0^2 + kI_0r^2 + kmr^4$$

$$kmr^4 + (kI_0 - 2E_0m)r^2 + L_0^2 - 2E_0I_0 = 0$$

$$r^2 = \frac{(2E_0m - kI_0) \pm \sqrt{(2E_0m - kI_0)^2 - 4km(L_0^2 - 2E_0I_0)}}{2km}$$

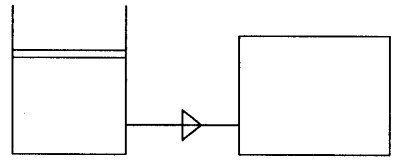
$$r^2_{max} = \left(\frac{E_0}{k} - \frac{I_0}{2m}\right) + \frac{1}{2km}\sqrt{4E_0^2m^2 + k^2I_0^2 \cancel{-4E_0mkI_0} - 4kmL_0^2 + 8kmE_0I_0}$$

$$= \left(\frac{E_0}{k} - \frac{I_0}{2m}\right) + \sqrt{\frac{E_0^2}{k^2} + \frac{I_0^2}{4m^2} - \frac{L_0^2}{km} + \frac{E_0I_0}{km}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{E_0}{k_0} - \frac{I_0}{m}\right) + \sqrt{\left(\frac{E_0}{k_0} + \frac{I_0}{m}\right)^2 - \frac{2L_0^2}{k_0m}}\right]$$

3) $$E_0 = \frac{L_0^2}{2I_0}$$

Esercizio 2: Si consideri il sistema illustrato in figura come il modello ideale di una pompa da bicicletta. Il contenitore di sinistra (pompa) è un cilindro chiuso superiormente da un pistone di massa trascurabile e libero di muoversi senza attrito lungo l'asse del cilindro. Il volume limitato dal pistone di superficie 0.0160 m^2 è inizialmente pari a 0.0120 m^3. Il contenitore di destra (ruota di bicicletta) è supposto indeformabile e di volume pari a 0.0390 m^3. I due recipienti sono collegati da un tubicino di volume trascurabile dotato di una valvola unidirezionale che si apre solo quando la pressione nella pompa supera quella della ruota. Inizialmente i gas all'interno della pompa e della ruota hanno la stessa temperatura 280 K dell'ambiente e la pressione nella pompa è uguale a quella atmosferica, pari a 10^5 Pa. La pressione all'interno della ruota è invece pari a 1.20×10^5 Pa. Il gas racchiuso nell'intero sistema è perfetto e biatomico. Ad un dato istante si applica al pistone della pompa una forza costante pari a 800 N e si lascia evolvere il sistema. Nell'ipotesi che durante il tempo impiegato dal sistema a raggiungere l'equilibrio termodinamico il calore scambiato con l'esterno sia trascurabile, determinare:



1. la temperatura raggiunta dal gas (5,0)
   T [K] = $\boxed{304}$ A $\boxed{3670}$ B $\boxed{4920}$ C $\boxed{304}$ D $\boxed{959}$ E $\boxed{6110}$

Si blocca il pistone nella posizione raggiunta e si chiude la valvola. Si supponga che in quest'istante la temperatura del sistema sia pari a 310 K. Si aspetta che il gas nei due contenitori raggiunga l'equilibrio termico con l'ambiente. Determinare:

2. la pressione finale del gas (5,0)
   $P \times 10^5$ [Pa] = $\boxed{1.35}$ A $\boxed{1.35}$ B $\boxed{1.50}$ C $\boxed{0.659}$ D $\boxed{0.766}$ E $\boxed{0.153}$

3. la variazione d'entropia dell'ambiente esterno prodotta dal complesso di tutte le trasformazioni (5,0)
   ΔS [J/K] = $\boxed{5.62}$ A $\boxed{6.40}$ B $\boxed{5.63}$ C $\boxed{0.332}$ D $\boxed{0.791}$ E $\boxed{3.48}$

1) $$n_S = \frac{P_e V_S}{R T_e}$$

$$n_D = \frac{P_d V_d}{R T_e}$$

Sistema S+D : $\Delta U = \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{Q} + \mathcal{L}_{ext}$

$$\Delta U = (n_S + n_D)\, C_V\, (T_f - T_e) = \left(\frac{F}{S} + P_e\right)(V_S - V_f)$$

$$P_f\,(V_f + V_D) = \overbrace{(n_S + n_D)}^{n}\, R\, T_f$$

$P_f \rightarrow \frac{F}{S} + P_e$ $\Rightarrow$ $$V_f = \frac{n R T_f}{\frac{F}{S} + P_e} - V_D$$

$$n C_v T_f - n C_v T_e = \left(\frac{F}{S} + P_e\right) V_S - \cancel{\left(\frac{F}{S}+P_e\right)} \frac{n R T_f}{\cancel{\frac{F}{S}+P_e}}$$

$$+ \left(\frac{F}{S} + P_e\right) V_D$$

$$n \underbrace{(C_v + R)}_{C_p} T_f = n C_v T_e + \left(\frac{F}{S} + P_e\right)(V_S + V_D)$$

$$T_f = \frac{C_v}{C_p} T_e + \left(\frac{F}{S} + P_e\right) \frac{V_S + V_D}{n C_p}$$

2) T_1 $\quad V_f$

$$P_f V_f = n R T_e$$

$$\left(P_e + \frac{F}{S}\right) V_f = n R T_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_f}{P_e + \frac{F}{S}} = \frac{T_e}{T_1}$$

$$P_f = \frac{T_e}{T_1}\left(P_e + \frac{F}{S}\right)$$

3) $\Delta S = \Delta S_{\text{punto 2}}$

$$\Delta S = \frac{Q_{amb \to sist}}{T_e} = - \frac{Q_{sist \to amb}}{T_e}$$

$$= - \frac{n C_v (T_e - T_1)}{T_e} = (n_S + n_D) C_v \frac{(T_1 - T_e)}{T_e}$$