LEZIONI DI ASTROFISICA II

Prof. Paolo Paolicchi

Indice

VERSIONE PROVVISORIA

0.1 Introduzione

Questi appunti costituiscono una sintesi delle lezioni del corso di Astrofisica II (Laurea Specialistica in Fisica, 6 crediti) tenute nell'A.A. 2002/2003. La presente versione è preliminare e incompleta. Per colmare le eventuali lacune sono fornite anche alcune essenziali indicazioni bibliografiche. In particolare sono consigliati i testi di Bertotti e Farinella (Physics of the Earth and the Solar System, Kluwer) e di Lucchin (Introduzione alla Cosmologia, Zanichelli).

Capitolo 1

Le fasi iniziali dell'evoluzione stellare. Strumenti di analisi

1.1 Introduzione

In questo capitolo, oltre a delineare le caratteristiche essenziali dei processi di collasso che avviano la formazione stellare, metteremo a punto alcuni strumenti di analisi. Il problema della formazione stellare è infatti troppo complesso per essere compreso e analizzato compiutamente mediante un modello teorico generale e onnicomprensivo ("paradigma") anche se molte simulazioni numeriche sono state effettuate negli ultimi anni anche con un certo successo. Ci limiteremo quindi a discutere e presentare i diversi ingredienti essenziali per la costruzione di un modello generale, in parte non ancora disponibile e sicuramente, in ogni caso, troppo complicato e articolato per i nostri scopi.

1.2 L'inizio del collasso.

La formazione stellare comincia con il collasso di una nube di gas interstellare, dovuto all'autogravitazione (eventualmente avviato o facilitato da eventi esterni produttori di compressione, esplosioni che causano onde d'urto ecc.). Il collasso diminuisce il momento d'inerzia; la condizione per l'inizio del collasso sarà quindi:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} < 0 \;\Rightarrow\; 2E_T + U < 0 \tag{1.1}$$

oppure

$$E_T < \left|\frac{U}{2}\right| \tag{1.2}$$

Consideriamo ora una nube omogenea di idrogeno molecolare[1] di massa $M = Nm_{H_2} = 2Nm_p$, di temperatura media T e densità ρ; si ha:

$$E_T = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}\frac{M}{2m_p}kT \tag{1.3}$$

[1] i gradi di libertà interni si assumono congelati

mentre

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{U}{2}\right| &= -\frac{U}{2} = \frac{1}{2}G\int_0^M \frac{M(r)dM(r)}{r} = \\
&= \frac{1}{2}G\int_0^R \frac{4}{3}\pi\rho r^3\frac{1}{r}4\pi\rho r^2 dr = \frac{1}{2}G\frac{16}{3}\pi^2\rho^2\int_0^R r^4 dr = \\
&= \frac{1}{2}G\frac{16}{15}\pi^2\rho^2 R^5 = \frac{1}{2}G\frac{3}{5}\frac{16}{9}\pi^2\rho^2 R^6\frac{1}{R} = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}\right] \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

La (1.2) è equivalente a porre:

$$\frac{3}{2}\frac{M}{2m_p}kT < \frac{3}{10}\frac{GM^2}{R}$$

ossia:

$$kT < \frac{2}{5}\frac{GMm_p}{R} \qquad (1.5)$$

ed essendo

$$\frac{4}{3}\pi\rho R^3 = M \quad \Rightarrow \quad R = \left[\frac{M}{\frac{4}{3}\pi\rho}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$kT < \frac{2}{5}\left[\frac{4\pi}{3}\right]^{\frac{1}{3}} GM^{\frac{2}{3}}m_p\rho^{\frac{1}{3}} \qquad (1.6)$$

Per densità molto basse, quali quelle che stiamo considerando, la nube è trasparente; la temperatura delle singole molecole dipende quindi, più che dalle caratteristiche specifiche della nube, dall'ambiente interstellare in generale (presenza di sorgenti di energia prossime, raggi cosmici ecc...); possiamo quindi supporre che T non vari molto nelle prime fasi del collasso. Uno schema di lavoro buono si ottiene sovente ponendo $T = cost \sim 10K$. La (1.6) prende la forma:

$$M^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{1}{3}} > c \qquad (1.7)$$

o anche

$$\rho > cost. \cdot M^{-2} \qquad (1.8)$$

che collega la densità minima, alla quale il collasso può cominciare, con la massa della nube. In numeri, essendo in CGS $k \sim 10^{-16}$, $T = 10$, $G = 1/1.5 \cdot 10^7$, $M \sim 2 \cdot 10^{33}$ $(M/M_\odot)$, $m_p \sim 1.5 \cdot 10^{-24}$ si ha approssimativamente:

$$\rho > 10^{-18}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2} \; g/cm^3 \qquad (1.9)$$

$M/M_\odot$	1	10	10^2	10^4	10^6
$\rho/g\ cm^{-3}$	10^{-18}	10^{-20}	10^{-22}	10^{-26}	10^{-30}

Il collasso delle nubi fredde più massicce appare quindi inevitabile. In realtà la situazione è un pò più complessa. Nelle nubi molecolari giganti sono di regola presenti fin dall'inizio (ossia quando le osserviamo) delle zone molto più dense della regione circostante. È in queste regioni che i processi di collasso hanno origine. Ci sono poi altri fattori che possono alterare la situazione, e introdurre effetti di equilibrio globale o parziale (campi magnetici, turbolenze ecc.). Una analisi elementare, basata ancora sul teorema del viriale, ci permette di capire anche quale possa essere il ruolo stabilizzatore della rotazione.

In presenza di rotazione si ha:

$$E_T \to \frac{3}{2}NkT + E_{rot} = E_{th} + E_{rot} \tag{1.10}$$

Definendo

$$\frac{E_{th}}{|U|} = \alpha \quad \frac{E_{rot}}{|U|} = \beta \tag{1.11}$$

la condizione per il collasso diviene

$$\alpha + \beta < \frac{1}{2} \tag{1.12}$$

Come abbiamo detto, nelle prime fasi del collasso la nube è trasparente; anche se una analisi dettagliata del bilancio termico permetterebbe di calcolare con precisione $T(\rho, t)$, possiamo in prima approssimazione porre $T = cost.$; ammettiamo poi che si conservino la massa M ed il momento angolare L. Si ha allora:

$$E_{th} = \frac{3}{2}kNT = cost. \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} E_{rot} &= \frac{1}{2}\frac{L^2}{I} \sim \frac{L^2}{2}\frac{1}{\frac{2}{5}MR^2} = \frac{L^2}{2}\frac{1}{\frac{2}{5}M\left[\frac{M}{\frac{4}{3}\pi\rho}\right]^{\frac{2}{3}}} = \\ &= \frac{L^2}{2}\frac{1}{\frac{2}{5}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}M^{\frac{5}{3}}\rho^{-\frac{2}{3}}} = \frac{5}{4\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}\frac{L^2}{M^{\frac{5}{3}}}\rho^{\frac{2}{3}} = \\ &= cost'\,\rho^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$U \simeq -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = cost''\,\rho^{\frac{1}{3}} \tag{1.15}$$

Si ha di conseguenza che

$$\alpha(\rho) = \alpha(\rho_0)\left[\frac{\rho}{\rho_0}\right]^{-\frac{1}{3}} \tag{1.16}$$

$$\beta(\rho) = \beta(\rho_0) \left[\frac{\rho}{\rho_0}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{1.17}$$

In termini della variabile $\psi = \rho/\rho_0$ e di $\alpha_0 = \alpha(\rho_0)$ e $\beta_0 = \beta(\rho_0)$ possiamo quindi definire la funzione

$$f(\psi) = \alpha_0 \psi^{-\frac{1}{3}} + \beta_0 \psi^{\frac{1}{3}} \tag{1.18}$$

La condizione del teorema del viriale (14.1) o (14.2) ci dice che il sistema si espanderà sicuramente se $f(\psi) > 1/2\ \forall\psi$, e collasserà sicuramente se $f(\psi) < 1/2\ \forall\psi$. La f ha un unico punto stazionario; derivando si ottiene:

$$f'(\psi) = \frac{\left[-\frac{1}{3}\alpha_0\psi^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\beta_0\psi^{\frac{1}{3}}\right]}{\psi} = 0$$

per

$$\psi = \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right]^{\frac{3}{2}} \equiv \psi_0 \tag{1.19}$$

e

$$f(\psi_0) = \alpha_0 \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right]^{-\frac{1}{2}} + \beta_0 \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right]^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\alpha_0\beta_0} \tag{1.20}$$

Ora in ψ_0 la f ha un minimo, come si dimostra derivando ancora:

$$\begin{aligned} f''(\psi_0) &= \frac{4}{9}\alpha_0 \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right]^{-\frac{7}{2}} - \frac{2}{9}\beta_0 \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right]^{-\frac{5}{2}} = \\ &= \frac{2}{9}\alpha_0 \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right]^{-\frac{7}{2}} > 0 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Possiamo quindi concludere che se $f(\psi_0) > 1/2$ il sistema si espanderà (finché è isotermo); la (1.20) dà allora la **condizione di collasso proibito**:

$$16\alpha_0\beta_0 > 1 \tag{1.22}$$

1.2.1 Casi particolari

- $\beta_0 = 0$ (assenza di rotazione): $\alpha + \beta$ decresce sempre e tende a zero; il sistema approssima un "collasso libero"; in teoria esso dovrebbe raggiungere densità infinite in un tempo finito. In pratica ciò non avviene per l'intervento di altri fenomeni, primo fra tutti il riscaldamento del gas (v. fase adiabatica).

- $\beta_0 < \alpha_0$: il collasso inizialmente accelera, poi comincia a rallentare e viene eventualmente bloccato, ma la rotazione produce anche fenomeni di fissione (v. seguito).

- $\beta_0 > \alpha_0$: l'effetto della rotazione diviene rapidamente prevalente e blocca il collasso; a prescindere da fenomeni di fissione, l'equilibrio verrebbe raggiunto quando $\beta(\psi^*) = 1/2$, ossia quando

$$\rho^* = \rho_0 \left(\frac{1}{2\beta_0} \right)^3 \tag{1.23}$$

Notiamo anche:

- per la rotazione, gli effetti di rottura di simmetria, discussi altrove, provocano fenomeni di schiacciamento, triassializzazione, eventualmente fissione. L'effetto globale sul collasso è molto più complesso.

- in generale $\alpha + \beta = 1/2$ non implica necessariamente l'equilibrio; se ad $\alpha + \beta = 1/2$ il sistema è in collasso, esso continua a collassare, salvo poi, eventualmente, rimbalzare indietro ed assestarsi all'equilibrio dopo una serie di oscillazioni smorzate. La condizione $\alpha + \beta = 1/2$ equivale ad una condizione meccanica $\vec{F} = 0$ e non $\vec{v} = 0$.

1.3 Le equazioni di Eulero e di Navier-Stokes.

In generale il problema del moto di un fluido può essere studiato definendo un campo di velocità

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \tag{1.24}$$

L'equazione del moto (v. Astrofisica I, eq. 6.6), esplicitata e generalizzata

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} \tag{1.25}$$

viene alterata, nella descrizione euleriana; essendo

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

si ottiene infine **l'equazione di Eulero**:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} \tag{1.26}$$

Nella deduzione dell'equazione (1.26) non si è ovviamente considerata la possibilità di processi dissipativi che possono aver luogo in un fluido in movimento per effetto della viscosità e di scambi di calore. Per l'introduzione dei fenomeni viscosi è utile riscrivere l'equazione di Eulero in forma tensoriale, usando anche l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \tag{1.27}$$

A tale scopo calcoliamo la velocità di variazione della densità d'impulso:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})$$

Con le usuali notazioni e convenzioni per gli indici ripetuti:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} - v_i\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} \tag{1.28}$$

D'altro lato l'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + g_i \tag{1.29}$$

può essere inserita nella (1.28) dando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= -v_i\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} - \rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) - \delta_{ik}\frac{\partial P}{\partial x_k} + \rho g_i \end{aligned}\tag{1.30}$$

E' possibile quindi definire il **tensore di flusso d'impulso**

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k \tag{1.31}$$

La (1.30) prende la forma (che spiega anche il nome scelto):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_{ik} + \rho g_i \tag{1.32}$$

Se $\vec{g} = 0$, integrando sul volume:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int(\rho v_i)dV = -\int\frac{\partial}{\partial x_k}(\Pi_{ik})\,dV = \oint \Pi_{ik}df_k \tag{1.33}$$

La generalizzazione della (1.32) al caso viscoso può essere fatta aggiungendo al tensore Π_{ik} un termine $-\sigma'_{ik}$ che caratterizza il trasporto viscoso d'impulso, dovuto sostanzialmente ad attriti interni; σ'_{ik} deve essere nullo in presenza di moto uniforme di tutto il fluido; deve dipendere dalle derivate di v rispetto alla posizione, ed essere quindi formato da termini della forma $\partial v_i/\partial x_k$. Anche in caso di rotazione uniforme ($\vec{v} = \vec{\Omega}\wedge\vec{r}$) σ'_{ik} si deve annullare.

Il tensore più generale che soddisfa a queste condizioni è (v. [Landau,Lifchitz, Mechanique des Fluides, MIR Eds.]):

$$\sigma'_{ik} = a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + b\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik} \tag{1.34}$$

con a e b indipendenti dalla velocità. Si scrive però più frequentemente σ'_{ik} sotto la forma

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \tag{1.35}$$

dove il tensore fra parentesi ha traccia nulla. Le quantità η e ζ sono i **coefficienti di viscosità**, e sono sempre positivi.

L'equazione del moto in presenza di viscosità si ottiene aggiungendo un termine della forma $\partial\sigma'_{ik}/\partial x_k$: abbiamo quindi

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \tag{1.36}$$

Se i coefficienti di viscosità η e ζ sono costanti o variano comunque lentamente con la posizione, è possibile porre:

$$\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial}{x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \tag{1.37}$$

dove

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} = \Delta v_i$$

e quindi la (1.36) può essere riscritta nella notazione vettoriale:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \tag{1.38}$$

Per un fluido incompressibile $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, e la (1.38) viene semplificata togliendo l'ultimo termine a destra, ed ottenendo l'**equazione di Navier-Stokes**; se $\vec{g} = 0$:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} - \vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} \tag{1.39}$$

La risoluzione delle equazioni (1.38) o (1.39) richiede ovviamente una accurata analisi delle condizioni al contorno. Non approfondiremo l'argomento in questa sede, rimandando a dei testi di meccanica dei fluidi (ad es. [op.cit.]).

1.4 Il criterio di Jeans.

Passiamo ora a discutere il **criterio di Jeans** (1929). Pur senza sottovalutare i problemi di autoconsistenza che lo caratterizzano (come vedremo fra un attimo) esso è uno strumento potente per inserire vari effetti nello scenario generale dei processi di collasso e di formazione.

La condizione iniziale del sistema è quella di un mezzo infinito non viscoso in equilibrio ($\vec{v} = 0$), con pressione (P_0), densità (ρ_0) e potenziale gravitazionale (ϕ_0) costanti nello spazio; le ipotesi sono a rigore inconsistenti, dato che l'equazione di Poisson

$$\Delta \phi_0 = 4\pi G \rho_0 \tag{1.40}$$

essendo $\phi_0 = cost.$ implicherebbe $\rho_0 = 0$ (e questo caso non è ovviamente di alcun interesse fisico). L'unica situazione in cui questa limitazione può essere effettivamente superata senza problemi è quella relativa all'Universo in espansione (teorema di Birkhoff).

Ignorando tutte le difficoltà, proseguiamo e perturbiamo le grandezze d'equilibrio:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \vec{v_0} & \rightarrow & \vec{v_0} + \vec{v_1} = \vec{v_1} \\ P_0 & \rightarrow & P_0 + P_1 \\ \rho_0 & \rightarrow & \rho_0 + \rho_1 \\ \phi_0 & \rightarrow & \phi_0 + \phi_1 \end{array} \right\} \tag{1.41}$$

ed usiamo le equazioni del moto, di continuità e di Poisson:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\rho \vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla}P - \rho\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} && (1.42)\\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) &= 0 && (1.43)\\
\Delta\phi &= 4\pi G\rho && (1.44)
\end{aligned}$$

Essendo poi:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} & = & \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \\ \vec{\nabla}P & = & \vec{\nabla}P_1 \\ \vec{\nabla}\phi & = & \vec{\nabla}\phi_1 \end{array}\right\} \qquad (1.45)$$

si ha al primo ordine

$$\begin{aligned}
(\rho_0+\rho_1)\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} &= -(\rho_0+\rho_1)\vec{\nabla}\phi_1 - \vec{\nabla}P_1\\
&\Rightarrow\\
\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} &= -\rho_0\vec{\nabla}\phi_1 - \vec{\nabla}P_1 && (1.46)
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
\partial\rho_1\partial t + \vec{\nabla}\left[(\rho_0+\rho_1)\vec{v}_1\right] &= 0\\
&\Rightarrow\\
\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0\,\vec{\nabla}v_1 &= 0 && (1.47)\\
\Delta\phi_1 &= 4\pi G\rho_1 && (1.48)
\end{aligned}$$

Ammettiamo che la perturbazione sia isoterma:

$$P_1 = \frac{KT}{2m_p}\rho_1 = c^2\rho_1 \qquad (1.49)$$

(dove c é la velocitá del suono; altrove anche c_s) e della forma:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{v_1}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\\
P_1 &= P_{10}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \rho_{10}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\\
\phi_1 &= \phi_{10}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}
\end{aligned}$$

Dalla (1.46) si ottiene

$$-\rho_0\, i\omega\vec{v}_1 = -\rho_0\, i\vec{k}\phi_1 - c^2\, i\vec{k}\rho_1$$

e quindi

$$\omega\rho_0\vec{v}_1 = \vec{k}\,(c^2\rho_1 + \rho_0\phi_1) \tag{1.50}$$

Dalla (1.50) risulta che $\vec{k} \parallel \vec{v}_1$, mentre dalla (14.31) si ottiene

$$-i\omega\rho_1 + i\vec{k}\cdot\rho_0\vec{v}_1 = 0$$

ossia

$$\vec{k}\cdot\vec{v}_1 = \omega\,\frac{\rho_1}{\rho_0} \tag{1.51}$$

La (1.48) infine si può scrivere nella forma:

$$-k^2\phi_1 = 4\pi G\rho_1$$

ossia:

$$\phi_1 = -\frac{4\pi G\rho_1}{k^2} \tag{1.52}$$

La (1.52) nella (1.50) dà:

$$\omega\rho_0\vec{v}_1 = \vec{k}c^2\rho_1 - \vec{k}\rho_0\frac{4\pi G\rho_1}{k^2} \tag{1.53}$$

moltiplicando scalarmente per $\vec{k}$ e dividendo per ρ_1 si ha:

$$\omega\rho_0\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{k}}{\rho_1} = k^2c^2 - 4\pi G\rho_0 \tag{1.54}$$

e ricordando la (1.51) si ottiene infine la *relazione di dispersione*:

$$\omega^2 = k^2c^2 - 4\pi G\rho_0 \tag{1.55}$$

Se $k^2c^2 > 4\pi G\rho_0$ $\omega^2 > 0$ e si hanno oscillazioni delle grandezze perturbate; se invece $k^2c^2 < 4\pi G\rho_0$ $\omega^2 < 0$ quindi ω è immaginario: esiste quindi una soluzione crescente esponenzialmente. La condizione $\omega^2 < 0$ definisce quindi il criterio di stabilità di Jeans in termini del vettore d'onda k_J:

$$k < k_J = \sqrt{4\pi G\rho_0\frac{2m_p}{KT}} \tag{1.56}$$

ed essendo la lunghezza d'onda di una perturbazione (λ) definita come $\lambda = 2\pi/k$, la (1.56) ci dice che sono instabili le perturbazioni con lunghezza d'onda

$$\lambda > \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \left[\frac{\pi KT}{G\rho_0 2m_p}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.57}$$

La più piccola massa che può collassare sarà quindi:

$$\begin{aligned} M &= M_J = \frac{4}{3}\pi\rho_0\left(\frac{\lambda_J}{4}\right)^3 = \frac{\pi}{6}\rho_0\left[\frac{\pi KT}{G\rho_0 8m_p}\right]^{\frac{3}{2}} = \\ &= CT^{3/2}/\rho_0^{1/2} \end{aligned} \tag{1.58}$$

con $C = costante$.

È facile rendersi conto che il criterio di Jeans ritrova, a meno di coefficienti non molto diversi dall'unità, la condizione per l'inizio del collasso (1.6).

Ma il criterio di Jeans è, almeno in linea di principio, più potente, in quanto prevede che, se la temperatura diventa molto minore di quella necessaria a garantire l'equilibrio (o quasi) iniziale, oltre al collasso globale del sistema possono anche avviarsi processi di collasso di parti, che potrebbero condurre a fenomeni di **frazionamento**. Lo stesso potrebbe accadere anche nelle fasi successive, quando ρ aumenta e T resta più o meno costante, causando quindi la progressiva diminuzione di M_J.

La nube potrebbe in sostanza subire processi di progressivo frazionamento, che avrebbero termine solo quando la temperatura del gas ricomincia ad aumentare. La presenza di rotazione, o eventualmente anche di campi magnetici e turbolenza, complica sensibilmente il discorso.

In realtà, anche in assenza di rotazione, campi magnetici e turbolenza, la situazione non è affatto semplice; a parte l'inconsistenza delle condizioni iniziali, l'avvio dello sviluppo delle sottocondensazioni in un ambiente già in rapido collasso può non avvenire del tutto –a meno, ovviamenente, che le sottcondensazioni siano fin dall'inizio presenti nel sistema– ed è comunque molto probabile una loro successiva coalescenza nella massa complessivamente collassante.

1.5 Estensioni del criterio di Jeans

1.5.1 Interpretazione semplice del criterio di Jeans

La relazione di dispersione (1.55) che può anche essere scritta nella forma:

$$\omega^2 = k^2c^2 - \Omega_J^2 \tag{1.59}$$

permette una semplice interpretazione fisica, sulla base della relazione qualitativa:

$$c_s^2 \sim E/m \sim P/\rho. \tag{1.60}$$

Per esempio nel caso limite $\omega \sim 0$ si ritrova essenzialmente il teorema del viriale:

$$c_s^2 \sim 4\pi G\rho_0/k^2 \sim 4\pi G\rho_0\lambda^2 \sim GM/r \tag{1.61}$$

.

Sulla base di questa semplice lettura della relazione di dispersione diventa immediato inserire nella stessa diversi effetti perturbativi. Si noti comunque che la cosa può anche essere fatta in modo più sistematico e rigoroso; le relazioni che andremo a ricavare in modo euristico saranno anche ottenibili sulla base di più complessi calcoli effettuati sulla falsariga di quelli con cui abbiamo dedotto il criterio di Jeans. Notiamo anche l'analogia fra la "frequenza di Jeans" Ω_J e la "frequenza di plasma" (data da una espressione simile, in cui la carica sostituisce ovviamente la massa), ben nota in altri contesti.

1.5.2 Effetto della turbolenza

L'effetto sostanziale della turbolenza è in questo contesto quello di aumentare l'energia cinetica disordinata presente nel sistema. In sintesi possiamo utilizzare ancora le solite espressioni facendo però la sostituzione:

$$c_s^2 \to c_s^2 + v_{turb}^2 \tag{1.62}$$

dove v_{turb} è la velocità caratteristica (e media) dei moti turbolenti. Di conseguenza cambiano

$$k_J = \Omega_J / \sqrt{c_s^2 + v_{turb}^2} \tag{1.63}$$

e

$$\lambda_J = 2\pi / \Omega_J \sqrt{c_s^2 + v_{turb}^2}. \tag{1.64}$$

Se v_{turb} domina il termine termico c_s si ha anche:

$$M_J^{turb} \propto \rho \lambda_J^3 \propto \rho \rho^{-3/2} v_{turb}^{3/2} = v_{turb}^{3/2} / \sqrt{\rho} \tag{1.65}$$

1.5.3 Effetto dei campi magnetici

Anche il campo magnetico può esercitare un ruolo di parziale inibizione del collasso e del frazionamento.

In particolare la pressione del campo magnetico si aggiunge a quella del gas:

$$P_G \to P_G + P_{MAG} \tag{1.66}$$

Seguendo la traccia dell'esempio precedente, si può vedere l'effetto del campo magnetico come una correzione:

$$c_s^2 \to c_s^2 + B^2/(4\pi\rho_0) \tag{1.67}$$

da cui conseguono:

$$\lambda_J = 2\pi / \Omega_J \sqrt{c_s^2 + B^2/4\pi\rho_0}. \tag{1.68}$$

e

$$M_J \propto \rho \Omega_J^{-3} (c_s^2 + B^2/4\pi\rho_0)^(3/2) \tag{1.69}$$

Se la pressione magnetica domina:

$$M_J^B \propto \rho\rho^{-3/2}B^3\rho^{-3/2} \propto B^3/\rho^2 \tag{1.70}$$

È interessante il caso in cui il campo magnetico è "congelato" nella materia collassante. Perchè ciò si verifichi occorre una adeguata conducibilità elettrica della materia, che si può avere in presenza di un certo grado di ionizzazione (qui per es. dovuta ai raggi cosmici). Si ha allora, in base alla conservazione del flusso magnetico ($\phi = Br^2$), $B \propto \rho^{2/3}$ e quindi

$$M_J^B = const. \tag{1.71}$$

Per nubi molecolari giganti e rarefatte, in presenza di un campo magnetico galattico di $10^{-5}o10^{-6}G$ l'effetto del campo magnetico diventa rilevante e potenzialmente decisivo.

Il discorso deve però essere raffinato per tenere conto di due aspetti:

1. Lo scongelamento del campo magnetico, dovuto ad effetti di "diffusione ambipolare", in pratica fenomeni di distacco tra le particelle cariche e la materia neutra, che collassa indisturbata traversando le linee di forza, cosicchè $B \propto \rho^c \quad c < 2/3$; la diffusione ambipolare è fortemente favorita da un basso grado di ionizzazione.

2. Il fatto che il campo magnetico non può essere trattato come un effetto di pressione tout-court; il passaggio di materia in fase di collasso può avvenire sia lungo le linee di forza del campo che attraverso esso.I relativi effetti del campo sul collasso sono nei due casi diversi. Il campo magnetico ha quindi un ruolo più di rottura della simmetria che di ostacolo al collasso.

1.5.4 Rotazione uniforme

In presenza di rotazione uniforme (caratterizzata da una velocità angolare Ω intorno ad un asse fisso) il collasso gravitazionale **sul piano perpendicolare all'asse** sarà ostacolato dalla differenza di velocità legata alla rotazione:

$$\delta v \sim \Omega\lambda \sim \Omega/k \tag{1.72}$$

per cui:

$$c_s^2 \rightarrow c_s^2 + \Omega^2/k^2 \tag{1.73}$$

La condizione di instabilità sarà allora espressa mediante la relazione di dispersione modificata con l'aggiunta di un termine "centrifugo":

$$\omega^2 = c_S^2k^2 + \Omega^2 - \Omega_J^2 \leq 0 \tag{1.74}$$

La relazione di dispersione differisce da quella usuale per la sostituzione

$$\Omega_J^2 \rightarrow \Omega_J^2 - \Omega^2 \tag{1.75}$$

da cui conseguono i nuovi valori di

$$\lambda_J = 2\pi c_s/\sqrt{4\pi G\rho_0 - \Omega^2} \tag{1.76}$$

e

$$M_J \propto \rho c_s^3/(4\pi G\rho_0 - \Omega^2)^{3/2} \tag{1.77}$$

Le equazioni precedenti dimostrano che la rotazione non solo aumenta la massa di Jeans (almeno per l'avvio del collasso sul piano di simmetria del sistema) ma crea una condizione supplementare, legata al segno dell'espressione dentro parentesi. La cosa può anche essere intepretata in modo elementare. Facciamo l'ipotesi che i corpi che stiamo studiando omogenei e isotropi (ipotesi ovviamente falsificata dalla presenza di rotazione, e che quindi possiamo considerare solo come approssimazione). L'energia di legame di un corpo di massa M e raggio R, in rotazione con velocità angolare uniforme Ω è:

$$U = -3GM^2/5R \tag{1.78}$$

mentre l'energia rotazionale sarà:

$$E_{rot} = 1/5MR^2\Omega^2. \tag{1.79}$$

Usando la definizione di β data precedentemente, e tenendo conto della relazione $M = 4/3\pi\rho_0 R^3$ si ha anche:

$$\beta = E_{rot}/U = 1/3R^3\Omega^2/GM = \Omega^2/\Omega_J^2. \tag{1.80}$$

Più correttamente sarà (tenendo conto delle approssimazioni fatte):

$$\Omega^2 = \chi\beta\Omega_J^2 \tag{1.81}$$

dove $\chi \sim 1$. Si potrà allora scrivere, per esempio:

$$M_J(\beta) = M_J(0)/(1-\chi\beta)^{3/2}. \tag{1.82}$$

Valgono ovviamente le stesse considerazioni fatte precedentemente in merito alla asimmetria introdotta dalla rotazione.

1.5.5 Rotazione non uniforme

La generalizzazione del criterio di Jeans può essere estesa al caso di rotazione differenziale.

Si potrebbe dimostrare (si veda ad es. [Bertotti e Farinella, op. cit.]) che in generale la relazione di dispersione prende la forma:

$$\omega^2 = c_S^2 k^2 - \Omega_J^2 + 2\Omega/r\ d/dr(\Omega r^2) \tag{1.83}$$

Per semplicità, limitiamoci ad analizzare in modo semplificato il caso della rotazione differenziale dovuta al moto "kepleriano" intorno ad una massa centrale. Seguendo la traccia del calcolo fatto per rotazione uniforme, avremo una differenza di velocità:

$$\Delta v \propto (1/\sqrt{r} - 1/\sqrt{r+\lambda}) \propto \lambda r^{-3/2} \sim \omega_{kepl}/k \tag{1.84}$$

da cui si ricava la relazione di dispersione:

$$\omega^2 = c_S^2 k^2 - \Omega_J^2 + \omega_{kepl}^2 \tag{1.85}$$

e quindi, per esempio:

$$\lambda_J = 2\pi c_s / \sqrt{4\pi G\rho_0 - \omega_{kepl}^2} \tag{1.86}$$

Ancora una volta l'instabilità richiede che il termine sotto radice debba essere positivo, e quindi:

$$4\pi G\rho_0 > GM_*/r^3 \tag{1.87}$$

dove M_* è la massa della struttura centrale ("stella") che genera il campo e quindi causa il moto kepleriano.

Il risultato permette di dedurre un (molto approssimativo) "limite di Roche", esprimendo M_* in funzione della sua densità ρ_* e del suo raggio R_*:

$$r > R_*(\rho_*/(3\rho_0))^{1/3} \tag{1.88}$$

(si veda il prossimo capitolo per una discussione più appropriata di questo punto). È anche interessante notare che la condizione (1.86) diventa:

$$4\pi\rho_0 r^3 > M_* \tag{1.89}$$

e che se la nube in moto kepleriano può essere vista come approssimativamente sferica la sua massa è $M_{nube} \sim 4/3\pi\rho_0 r^3$ e quindi otteniamo:

$$M_{nube} > M_*/3. \tag{1.90}$$

Discuteremo nel prossimo capitolo questo importante risultato e ne capiremo il significato per la definizione dei modelli di disco protoplanetario.

Vedremo anche come il discorso debba ancora essere adattato in funzione dello spessore del disco.

1.6 Corpi autogravitanti in rotazione.

Un corpo in rotazione non avrà più forma sferica. Un corpo fluido in rotazione può essere caratterizzato dal parametro

$$u = \frac{\omega^2 R^3}{GM} \tag{1.91}$$

che sarebbe uguale al rapporto fra forza centrifuga equatoriale e forza peso se il corpo fosse sferico, e vicino anche al rapporto fra energia rotazionale e gravitazionale.

Infatti per un corpo sferico omogeneo

$$E_{rot} = \frac{1}{5} M R^2 \omega^2$$

$$E_{grav} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

e quindi

$$\frac{E_{rot}}{E_{grav}} = \frac{1}{3}\frac{\omega^2 R^3}{GM} = \frac{1}{3}u \tag{1.92}$$

Se il corpo è omogeneo:

$$u = \frac{\omega^2}{\frac{4}{3}\pi G\rho} = \frac{3}{4}\frac{\omega^2}{\pi G\rho} \tag{1.93}$$

In effetti, per rotazione non eccessivamente rapida, la forma del corpo rotante è quella di un ellissoide biassiale, con l'asse minore lungo l'asse di rotazione, semiassi a e b ed eccentricità e (fig. 1.1):

$$b = a\left(1 - e^2\right)^{1/2} \tag{1.94}$$

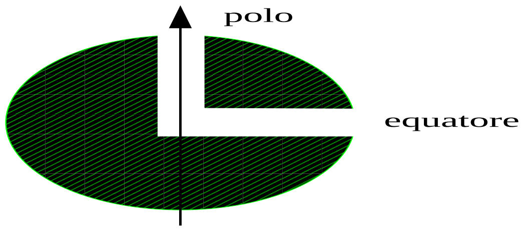

Figura 1.1: ellissoide di rotazione.

Per trovare la forma si può usare l'argomento classico di Newton basato sulla condizione di equilibrio di due colonne di fluido, una polare ed una equatoriale, connesse al centro della Terra, e sul fatto che $g \propto r$ lungo un raggio per un corpo omogeneo.

Si ottiene

$$\frac{1}{2}ag_{eq}(1-u) = \frac{1}{2}bg_{polo} \tag{1.95}$$

ossia

$$ag_{eq} - a^2\omega^2 = g_{polo}\, a\sqrt{(1-e^2)}$$

e quindi:

$$\omega^2 = \frac{1}{a}\left[g_{eq} - g_{polo}\sqrt{(1-e^2)}\right] \tag{1.96}$$

Per un ellissoide di rotazione omogeneo, come fu già dimostrato da Mc Laurin:

$$g_{eq} = 2\pi G\rho a\,\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e^3}\,\left[\arcsin e - e\sqrt{(1-e^2)}\right] \tag{1.97}$$

$$g_{polo} = 4\pi G\rho a \, \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e^3} \, \left[e - \sqrt{(1-e^2)}\, \arcsin e\right] \tag{1.98}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{\pi G\rho} &= \left[2\, \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e^3} \arcsin e - 2\, \frac{1-e^2}{e^2} - \frac{4\,(1-e^2)}{e^2} + 4\, \frac{\sqrt{(1-e^2)^3}}{e^3} \arcsin e\right] = \\
&= 2 \arcsin e \, \frac{\sqrt{(1-e^2)}\,(3-2e^2)}{e^3} - \frac{6}{e^2}\left(1-e^2\right)
\end{aligned} \tag{1.99}$$

Sviluppando in serie, per piccoli valori di e:

$$\frac{\omega^2}{\pi G\rho} \sim \frac{5}{6}\, e^2 \tag{1.100}$$

Il comportamento per e qualsiasi è schematizzato nella fig. 1.2.

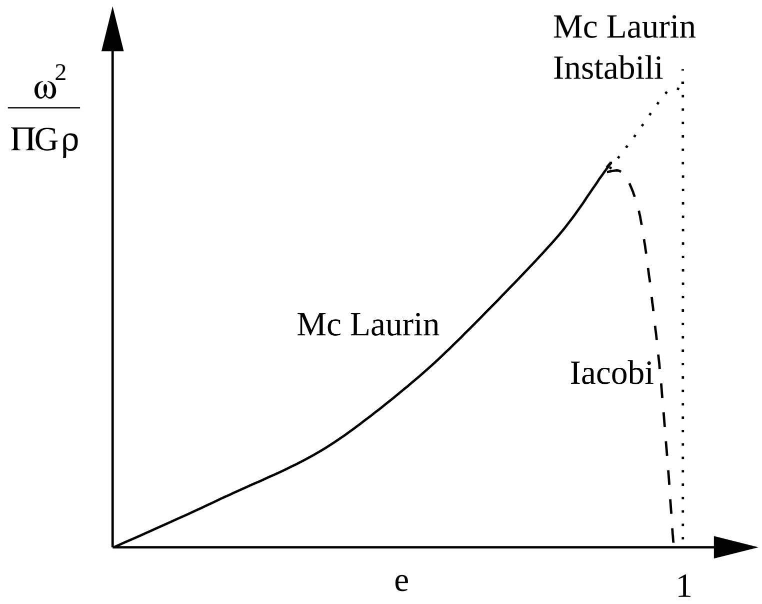

Figura 1.2: figure di equilibrio.

Definendo lo schiacciamento ai poli:

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_{eq} - R_{polo}}{R_{eq}} = 1 - \sqrt{(1-e^2)} \sim \frac{e^2}{2} \tag{1.101}$$

si ritrova la relazione di Newton, per rotazione non troppo veloce:

$$\epsilon \simeq \frac{4}{5}\, u \tag{1.102}$$

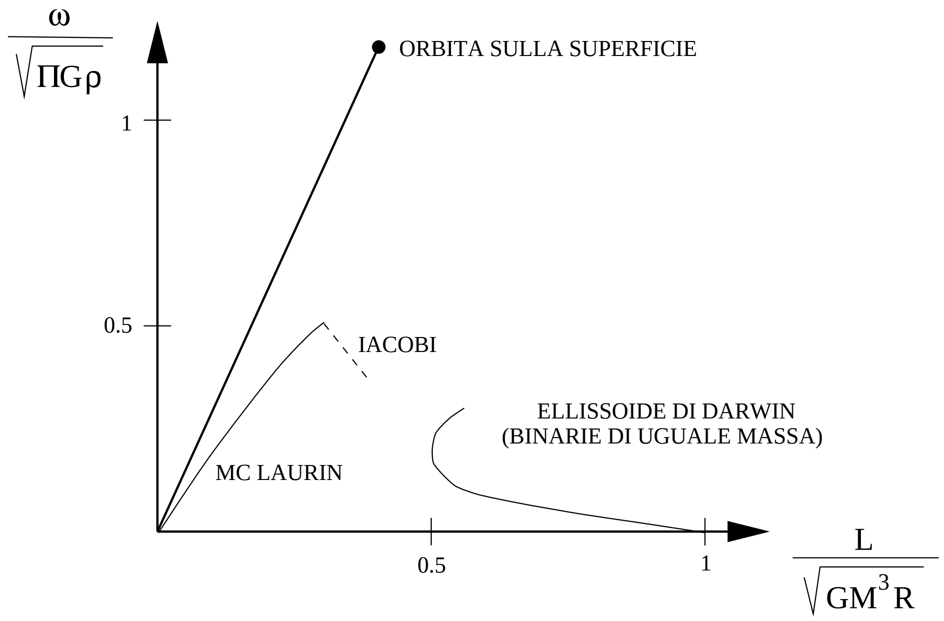

Figura 1.3: relazione $\omega - L$ per diverse figure di equlibrio.

La sequenza si arresta a $\omega^2/\pi G\rho \simeq 0.449$ ed $e \simeq 0.93$; ma già per $\omega^2/\pi G\rho \simeq 0.374$ ed $e \simeq 0.8127$ la *sequenza di Mc Laurin* diventa instabile per deformazioni triassali. Le figure di equilibrio stabile diventano ora ellissoidi triassali ("ellissoidi di Iacobi") di maggior momento di inerzia, per i quali all'aumentare del momento angolare ω diminuisce. Per rotazione ancora più veloce ($E_{rot}/E_{grav} \geq .25$) si arriva alla fissione.

I risultati sono qualitativamente generalizzabili in molti casi (es. sistemi non omogenei ecc.). La relazione fra ω e momento angolare per varie figure d'equilibrio è schematizzata in fig. 1.3.

Maggiori dettagli possono essere trovati in [Chandrasekhar, Ellipsoidal Figures of Equilibrium].

1.7 Fissione per rotazione.

Interessante si presenta anche il problema della **fissione per rotazione**. In generale si pensa che, anche in condizioni dinamiche, se β supera un certo valore $\beta_{crit} \sim .25$, il sistema debba necessariamente spezzarsi in 2 parti. Il problema non è per niente semplice né del tutto chiarito (v. seguito). A titolo di esercizio ammettiamo che il processo di fissione avvenga sempre non appena $\beta > \beta_{crit}$, che la fissione sia in due parti identiche ($M \to M/2 + M/2$), e che ognuna delle due si prenda una frazione λ del momento angolare totale ($2\lambda < 1$; il resto va in momento orbitale: $\lambda_{orb} : 2\lambda + \lambda_{orb} = 1$).

Possiamo allora seguire una catena di fissioni gerarchiche

$$\begin{array}{ll} \rho = \rho_0 & \beta = \beta_0 < \beta_{crit} \\ \rho = \rho_1 & \beta = \beta_{crit} \end{array}$$

$$
M \quad \begin{array}{lll} M/2 & \rho = \rho_1 & L = \lambda L \\ M/2 & \rho = \rho_1 & L = \lambda L \end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{rot} &= C\frac{L^2}{M^{\frac{5}{3}}}\rho^{\frac{2}{3}} \\
E_{rot}^{(1/2)} &= C\frac{\lambda^2 L^2 2^{\frac{5}{3}}}{M^{\frac{5}{3}}}\rho^{\frac{2}{3}} = E_{rot}\, 2^{\frac{5}{3}}\lambda^2
\end{aligned}
$$

con $C = cost.$, si ha inoltre

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = -\frac{3}{5}GM^{\frac{5}{3}}\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^{\frac{1}{3}} \\
U^{(1/2)} &= U\, 2^{-\frac{5}{3}}
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\beta^{(1/2)} = 2^{\frac{10}{3}}\lambda^2\beta_{crit} \tag{1.103}
$$

Se $\lambda < 2^{-5/3}$ (.3) i due frammenti riprendono a collassare finché

$$
\beta_{\rho_2}^{(1/2)} = \beta_{crit}
$$

che avviene quando:

$$
2^{\frac{10}{3}}\lambda^2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 \tag{1.104}
$$

Il processo si ripete finché il collasso non ha termine.

Se λ non è troppo piccolo è possibile avere una serie abbastanza lunga di fissioni gerarchiche, secondo lo schema

$$
\begin{array}{llllllllll}
 & & M & & & & & & & \\
1 & \rho_1 & M/2 & & & M/2 & & & & \\
2 & \rho_2 = A\rho_1 & M/4 & M/4 & M/4 & M/4 & & & & \\
3 & \rho_3 = A^2\rho_1 & M/8 & M/8 & M/8 & M/8 & M/8 & M/8 & M/8 & M/8 \\
4 & \rho_4 = A^3\rho_1 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & ..
\end{array}
$$

I momenti angolari corrispondenti saranno, in unità di L:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_{orb(1)} & = & 1-2\lambda \\ \lambda_{orb(2)} & = & \lambda(1-2\lambda) \\ \lambda_{orb(3)} & = & \lambda^2(1-2\lambda) \\ \lambda_{orb(4)} & = & \lambda^3(1-2\lambda) \end{array} \right\} \tag{1.105}$$

e dalla III legge di Keplero

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{cost.}{(m_1+m_2)} \tag{1.106}$$

si ha:

$$a = cost' \frac{L^2}{m_{tot}^3} \tag{1.107}$$

ne consegue

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1 = cost & (1-2\lambda)^2 \\ a_2 = cost & 8\lambda^2(1-2\lambda)^2 = 8\lambda^2 a_1 \\ a_3 = cost & 64\lambda^4(1-2\lambda)^2 = 64\lambda^4 a_1 \\ a_4 = cost & 512\lambda^6(1-2\lambda)^2 = 512\lambda^6 a_1 \end{array} \right\} \tag{1.108}$$

Per le separazioni avremo infine (al momento della fissione)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g_1 & = & \frac{2R_1}{a_1} = cost \frac{M^{\frac{1}{3}}}{\rho_1^{\frac{1}{3}} a_1} \\ g_2 & = & \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{cost M^{\frac{1}{3}}}{\rho_2^{\frac{1}{3}} 8\lambda^2 a_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\lambda^2 2^{\frac{10}{3}}}{8\lambda^2} g_1 = g_1 \\ ... & = & ... \end{array} \right\} \tag{1.109}$$

Le (1.107) e (1.108) permettono di collegare i rapporti fra le varie caratteristiche delle gerarchie (semiassi orbitali o densità di fissione) con il parametro λ.

1.8 La fase "adiabatica".

Passiamo ora a discutere che cosa succede a densità un po' maggiori, quando il libero cammino medio dei fotoni all'interno della nube collassante diviene minore del raggio della stessa nube e la temperatura comincia ad aumentare.

Il libero cammino medio è definito come

$$l = \frac{1}{k\rho} \tag{1.110}$$

(k è l'opacità); la condizione per l'inizio del riscaldamento diventa:

$$k\rho R > 1 \tag{1.111}$$

In generale $k = k(\rho, T)$, ed aumenta sensibilmente con T; ma finché siamo nella zona isoterma $T \sim cost\,(\sim 10\,K)$ e k è $\sim$ costante; la (1.110) prende la forma

$$\rho R > cost.$$

ossia:

$$\rho_{AD} = cost \cdot M^{-1/2} \tag{1.112}$$

dove ρ_{AD} è la densità per la quale la temperatura comincia a salire; si dice allora che finisce la fase isoterma e comincia quella *"adiabatica"*.

Se questa fase fosse reamente adiabatica non sarebbe possibile aumentare ρ di oltre un fattore 8; ammettiamo infatti che per $\rho = \rho_{AD}$ sia $E_T \ll |U|$ ($\alpha \sim 0$); la conservazione dell'energia dice che $\Delta E_T = -\Delta U$; l'equilibrio sarà raggiunto quando:

$$E_T(AD) + \Delta E_T = \frac{1}{2}|U + \Delta U|$$

da cui segue che

$$\Delta E_T = \frac{3}{10}GM^2\frac{1}{R+\Delta R} = \frac{3}{5}GM^2\left(\frac{1}{R+\Delta R} - \frac{1}{R}\right)$$

ossia

$$\frac{1}{2}\frac{1}{R+\Delta R} = \frac{1}{R} \Rightarrow R + \Delta R = \frac{R}{2} \Rightarrow \rho' = 8\rho_{AD} \tag{1.113}$$

Ma nella evoluzione reale buona parte dell'energia viene emessa; uno schema fisico spesso usato in letteratura fa uso di una "pseudoadiabatica" di gas biatomico o monoatomico

$$P \propto \rho^{\frac{5}{3}} \quad \text{o} \quad \rho^{\frac{7}{5}} \tag{1.114}$$

che però rappresenta una vera adiabatica solo se si parte da condizioni di equilibrio o di quasi equilibrio.

Se comunque le grandezze termodinamiche si comportano in analogia con la (1.113), avremo

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T_0\left(\frac{\rho}{\rho_{AD}}\right)^{\gamma-1} \\ P = P_0\left(\frac{\rho}{\rho_{AD}}\right)^{\gamma} \end{array} \right\} \tag{1.115}$$

Se $\gamma > 4/3$ α prima o poi ridiventa $> 1/2$; la condizione di equilibrio ha la forma:

$$kT_0\left[\frac{\rho_{EQ}}{\rho_{AD}}\right]^{\gamma-1} = cost \cdot M^{\frac{2}{3}}\rho_{EQ}^{\frac{1}{3}}$$

ossia:

$$\rho_{EQ}^{\gamma-4/3} = cost \cdot M^{\frac{2}{3}}\rho_{AD}^{\gamma-1} \tag{1.116}$$

Mediante la (14.52) si ha infine

$$\rho_{EQ} = cost \cdot M^{\left(\frac{7}{6}-\frac{\gamma}{2}\right)/\left(\gamma-\frac{4}{3}\right)} \tag{1.117}$$

$$\equiv cost \cdot M^{\theta} \quad (\text{def.}\theta) \tag{1.118}$$

Per esempio se $\gamma = 5/3$ (adiabatica di gas perfetto monoatomico) $\theta = 1$, se $\gamma = 7/5$ $\theta = 7$. Quantitativamente, per $M \sim M_\odot$

$$\gamma = \frac{5}{3} \quad \rho_{EQ} \sim 10^{-10} g/cm^3$$

$$\gamma = \frac{7}{5} \quad \rho_{EQ} \sim 10^{6} g/cm^3$$

Solo se la temperatura aumenta rapidamente con la densità sarà possibile ristabilire un realistico equilibrio. Fisicamente la situazione è resa più complessa dal fatto che per $T > 10^3$ K hanno inzio i processi di dissociazione molecolare e di ionizzazione, che rallentano l'aumento di T e di P con ρ, creando le condizioni per una nuova accelerzione del collasso.

In ogni caso alla fine del collasso la zona centrale raggiungerà l'equilibrio mentre le parti periferiche continuano a contrarsi. Si avrà un fenomeno di rimbalzo, e successivamente il sistema si assesterà in uno stato di quasi equilibrio.

Capitolo 2

Formazione di sistemi stellari e planetari

2.1 Introduzione

Il quadro evolutivo finora descritto deve spiegare alcuni fatti presenti nella realtà:

1. Le masse tipiche delle nubi di gas interstellare sono spesso molto maggiori delle masse tipiche delle stelle.
2. Le stelle sono per lo più raggruppate in ammassi.
3. Oltre metà delle stelle sono in sitemi doppi o multipli.
4. Esistono diversi sistemi planetari (ormai da alcuni anni al Sistema Solare si sono aggiunti diversi sistemi extrasolari, anche se solo parzialmente conosciuti).

Un quadro evolutivo deve quindi contemplare:

1. Fenomeni di frazionamento in molti sistemi.
2. Fenomeni di fissione o frazionamento finali in pochi sistemi.
3. Formazione di strutture stella+disco protoplanetario.

La situazione è al momento molto problematica: non è possibile trattare il problema nè con calcoli analitici sufficientemente sofisticati nè con simulazioni numeriche del tutto affidabili.

Ricordiamo qui alcuni risultati:

1. Il frazionamento è legato a processi di fissione per rotazione a cascata; non è chiaro fino a che punto altri processi siano efficiaci nel frazionare la nube iniziale. Si ricordi però che nelle nubi molecolari sono presenti (e osservate) condensazioni inziali abbastanza spinte, che possono avviare un processo di collasso intorno a diversi punti di aggregazione; l'evoluzione successiva è però complessa, ed entrano in gioco anche fenomeni a priori non prevedibili come la formazione di energetici *jets* di materia, sicuramente molto efficaci per trasferire il momento angolare.

2. La presenza di moti turbolenti esercita un ruolo di parziale inibizione del collasso e del frazionamento.

3. Campi magneticie rotazione creano un meccanismo di inibizione ai processi di collasso che però agisce in modo anisotropo, bloccandolo sul piano di simmetria (quello che contiene le linee di forza, o quello perpendicolare al momento angolare).

4. Se si ammette la conservazione della simmetria assiale intorno all'asse di rotazione, sono possibili qualitativamente due tipi di configurazione: una condensazione centrale con un disco e una struttura a toro. La prima potrebbe essere origine di sistemi planetari o di stelle singole, la seconda dovrebbe frazionarsi in due o più oggetti uguali formando stelle gemelle (molto frequenti in natura).

5. Se si viola la conservazione della simmetria assiale è possibile formare strutture di equilibrio a forma di ellissoide triassiale (ellissoidi di Jacobi). Aumentando ancora β gli ellissoidi possono rompersi; si era ritenuto fino a pochi anni fa che la rottura fosse in due parti uguali; analisi numeriche sembrano invece favorire la rottura in due parti abbastanza diverse. Si ricordi inoltre che la teoria delle forme di equilibrio non può essere applicata con eccessiva confidenza a circostanze in cui la materia è in fase di rapido collasso.

6. Osservativamente i sistemi doppi con componenti di uguale massa rappresentano la maggioranza di quelli più stretti del Sistema Solare (è ancora in discussione l'esistenza di un secondo picco nella distribuzione dei rapporti di massa, che sarebbe situato a ($m_2/m_1 \sim 1/4$); i sistemi doppi più larghi hanno in generale componenti di masse diverse.

   Alcuni autori spiegano la situazione mediante l'esistenza di due meccanismi: frazionamento da toro a stelle gemelle strette e fissione da ellissoide a stelle doppie sbilanciate e larghe.

In questo contesto un ruolo importante è giocato dalle "'teorie cosmogoniche", vale a dire dai modelli di formazione del Sistema Solare.

I modelli cosmogonici oggi presi in esame sono sostanzialmente tutti alla Kant-Laplace, cioè utilizzano come protosistema una struttura stella+disco protoplanetario.

Il disco –relativemente stabile– da cui si formano i pianeti dovrebbe essere il risultato finale dell'evoluzione di un disco di accrescimento, un tipo di struttura studiato teoricamente negli ultimi anni in diversi contesti.

D'altro canto strutture a disco circumstellari sono state osservate negli ultimi anni, e sono state spesso interpretate come progenitori di futuri sistemi planetari.

Sia le osservazioni sia la teoria dei dischi presentano grossi margini di incertezza. I dischi osservati hanno masse che variano da un millesimo della massa della stella centrale a valori non tropo inferiori a quest'ultima. I valori dei rapporti di massa si attestano frequentemente su qualche centesimo: un rapporto che sembrerebbe non troppo diverso da quello che potrebbe aver caratterizzato il disco primordiale relativo al Sistema Solare. Da un punto di vista teorico dischi troppo massicci soffrono problemi di instabilitá; secondo Pringle (1981) un disco di spessore h a distanza r dal centro è instabile se la sua massa M_d, in unità della massa della stella centrale, supera h/r. Una instabilità globale compare comunque quando $M_d > 0.3$ (Shu et al., 1990): in definitiva i dischi non possono essere troppo massicci.

L'evoluzione dei dischi di accrescimento vede comunque una parte della loro massa cadere sulla stella. Nel tempo si ha un disco di massa crescente, che, in altri termini, accresce dall'esterno piu' materia di quella che poi riversa sulla stella, fino ad un massimo. Successivamente il disco comincia a perdere massa e si esaurisce progressivamente.

Altre caratteristiche rilevanti sono la divisione del disco in due parti, quella esterna nella quale i moti sono di regola verso l'esterno, e quella interna in cui invece la materia tende a cadere verso la stella. La distanza di separazione tra queste due zone tende a spostarsi, nel tempo, verso l'esterno.

Nel tempo la temperatura del disco tende a diminuire (su scala di un milione di anni o meno) e puó iniziare la coagulazione di particelle solide. Da questo momento in poi deve avere inizio la formazione planetaria (se del caso), prima che i grani abbiano tempo di spiralizzare verso l'interno e cadere sulla stella.

Due principali scuole di pensiero si dividevano, fino a qualche anno fa, nell'attribuire al disco protoplanetario una massa all'incirca uguale a quella del proto-Sole (modelli di Cameron, C) o dell'ordine di qualche centesimo della stessa (modelli alla Safronov, S).

I problemi di stabilità testè discussi, ed soprattutto altre considerazioni che faremo in seguito, hanno ormai fatto abbandonare i modelli con disco massiccio, almeno per quanto riguarda la formazione del Sistema Solare. A scopo didattico sarà comunque utile mantenere il raffronto fra di essi, per chiarire meglio i fondamentali processi fisici coinvolti.

La differenza tra i due modelli diviene chiara se noi consideriamo il **momento angolare specifico** dei seguenti oggetti:

1. S_0 -il Sistema Solare attuale.
2. $S_{(S)}$ -il Sistema Solare con le stesse dimensioni e massa 50 volte maggiore dell'attuale ($M_{S.Sol} \sim M_\odot 1.001, \quad M_{S.Sol} - M_\odot \sim 10^{-3} M_\odot$ e quindi $M_{disco}^{orig} \sim M_\odot 5 \cdot 10^{-2}$).
3. $S_{(C)}$ -il Sistema Solare con le stesse dimensioni e massa del disco $\sim M_\odot$.
4. B_S -una binaria con $x = M_2/M_{tot} \sim 10^{-1}$ e $T \sim 10^2 y$ (binaria larga e sbilanciata).
5. B_G -una binaria con $x = .5$ e $T \sim 10y$ (binaria gemella).
6. N -una nube interstellare media (sulla base delle osservazioni).

Poichè per una binaria con $M_2 = XM, \quad , M = M_\odot$ e T in secondi vale per il momento angolare specifico j:

$$j = 1.37 \cdot 10^{17} x(1-x) T^{1/3} \quad cm^2/s \tag{2.1}$$

usiamo $1.37 \cdot 10^{17}$ come unità di misura. Abbiamo allora:

Modello	S_0	$S_{(S)}$	$S_{(C)2}$	B_S	B_G	N
j	~ 1	~ 50	$\sim 10^3$	~ 120	~ 170	$\sim 10^6$

La tabella può ora essere commentata.

1. Esiste un gap di j fra la nube media e i sistemi binari o protoplanetari. Questo gap può essere superato tenendo in conto la possibilità di frammentazione gerarchica, gli effetti dei jets ed altri possibili effetti d'insieme.

2. A seconda del modello S o C i sistemi planetari si collocano al disopra o al disotto dei sistemi binari.j è quindi il "parametro decisivo" nella scelta tra la formazione di una binaria e quella di un sistema planetario. Va però notato che nel caso S l'aumento di j provoca un regolare aumento della massa collocata nella seconda componente; nel caso C invece si balza avanti, dalle binarie sbilanciate a quelle gemelle, salvo poi rimbalzare violentemente indietro al 10^{-3} del Sistema Solare.

Da un punto di vista fisico la principali difficoltà (almeno a questo punto) del modello S è l'esistenza di zone a j molto basso (ma sempre entro un ordine di grandezza rispetto alle binarie); tra le difficoltà del modello C c'é quella di dover poi disperdere il 999°% della massa del disco prima di formare i pianeti. Inoltre (e questa sembra una difficoltá ancor maggiore a superare) i dati chimici ci descrivono una robusta differenziazione anche tra la composizione dei pianeti giganti e quella solare, e non si capisce come questa possa aver avuto luogo, in un modello in cui, come vedremo, si formano inizialmente giganteschi nuclei planetari gassosi. Analogamente appare quasi impossibile prevedere un qualche ragionevole meccanismo per formare i numerosi corpi minori (asteroidi, comete, satelliti). Le precedenti considerazioni hanno di fatto causato un progressivo abbandono dei modelli "alla Cameron" negli ultimi anni, ed una attenzione ormai completamente concentrata sui modelli di tipo S.

2.2 Uno schema di formazione di sistemi planetari, partendo dalla formazione di un disco

2.2.1 Struttura verticale del disco.

La condizione di equilibrio verticale può essere espressa mediante l'equazione dell'equilibrio idrostatico, dove al posto di g viene ovviamente inserita la componente g_z:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g_z = -\rho \frac{GM}{a^2}\frac{z}{a} \tag{2.2}$$

Se $P = \frac{kT}{m}\rho$

$$\frac{kT}{m}\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{GM}{a^3} z dz \tag{2.3}$$

e integrando

$$\rho(z) = \rho(0) e^{-\frac{GMm}{a^3 kT} z^2} \tag{2.4}$$

Da cui è anche possibile calcolare lo spessore effettivo del disco definito come:

$$\frac{1}{\rho(0)} \int \rho(z) dz = H \tag{2.5}$$

Con dei numeri ragionevoli ($a = a_{Giove}, \quad T \sim 100 \quad K$,molecole d'idrogeno) si ottiene

$$\frac{H}{a} \sim .1 \tag{2.6}$$

che ci permette di rappresentarci la struttura del disco con una certa chiarezza. Notiamo che

$$\frac{H}{a} \sim \left(\frac{akT}{GMm}\right)^{1/2}. \tag{2.7}$$

Se ammettiamo che T sia valutabile da una ipotesi di equilibrio radiativo con il Sole $T^4 R^2 = cost \Rightarrow T \propto a^{-1/2}$ e quindi $\frac{H}{a} \propto a^{1/4}$.

Sulla base di modelli fisici piú sofisticati la dipendenza di T dalla distanza potrebbe andare con una potenza $-3/4$; ció renderebbe ancora piú lenta la variazione di H/a ($\propto a^{1/8}$).

2.2.2 Instabilità gravitazionali

Lo studio delle instabilità gravitazionali nel disco può essere fatto a diversi livelli di raffinatezza. Possiamo per esempio usare le considerazioni svolte nel capitolo precedente in merito al criterio di Jeans. Tali considerazioni possono, per esempio, portare ad una formulazione qualitativamente valida del *limite di Roche*, su cui torneremo fra un attimo. Va peró notato che certe ipotesi del criterio di Jeans, quali la costanza del potenziale gravitazionale nello spazio prima dell'avvio degli eventuali processi di condensazione, non sono valide in un sistema orbitante intorno ad un campo centrale. Gli effetti **mareali**, dovuti proprio al gradiente del campo, hanno qui una rilevanza predominante. Certe tecniche del criterio di Jeans possono peraltro essere con cautela applicate per studiare la crescita iniziale delle condensazioni (vedi per es. il libro di Bertotti e Farinella, op. cit.), ma si imbattono in una ulteriore difficoltà tecnica e fisica, lo spessore finito del disco. Non potremo quindi condurre a termine una analisi organica, e ci limiteremo alla discussione di alcuni aspetti particolari, cercando di mettere in evidenza le conseguenze fisiche più rilevanti.

2.2.3 Limite di Roche

Il modo più semplice passa attraverso il cosiddetto "limite di Roche" (v.anche la discussione nel Cap.1), che è normalmente usato per decidere quando un satellite tenuto insieme dalle forze gravitazionali sta per rompersi, ma che può essere naturalmente applicato anche come condizione **necessaria** perchè una condensazione autogravitante possa svilupparsi.

Il limite di Roche può essere qualitativamente dedotto studiando le equazioni del moto di due sferette di massa m in orbita a distanza $r - \delta$ e $r + \delta$ da un centro di massa M. Esse possono orbitare di conserva se la mutua gravitazione è sufficientemente grande.

La condizione di equilibrio per le due componenti sarà:

$$-\frac{GM}{r^2\left(1-\frac{\delta}{r}\right)^2} + \omega^2(r-\delta) + \frac{Gm}{4\delta^2} = 0 = -\frac{GM}{r^2\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2} + \omega^2(r+\delta) - \frac{Gm}{4\delta^2} \tag{2.8}$$

da cui, sommando le due equazioni, si ottiene:

$$\omega^2 r = \frac{GM}{2r^2}[1/(1+\delta/r)^2 + 1/(1-\delta/r)^2] \tag{2.9}$$

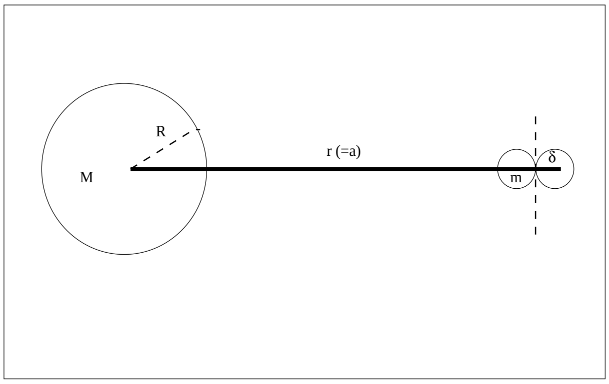

Figura 2.1: Schematizzazione per il calcolo del limite di Roche.

che, se $\delta/r \ll 1$, permette di ritrovare al primo ordine la terza legge di Keplero per il centro di massa:

$$\omega^2 = GM/r^3 \tag{2.10}$$

Nella stessa approssimazione, calcolando la differenza fra le due equazioni relative all'equilibrio delle singole componenti, si ottiene:

$$\frac{Gm}{2\delta^2} = -\frac{GM}{r^2}\left[\frac{1}{1+\frac{2\delta}{r}} - \frac{1}{1-\frac{2\delta}{r}}\right] + \omega^2\Big[(r+\delta)-(r-\delta)\Big] = \tag{2.11}$$

$$= -\frac{GM}{r^2}\left[1-\frac{2\delta}{r}-1-\frac{2\delta}{r}\right] + 2\omega^2\delta = \frac{GM}{r^3}4\delta + 2\omega^2\delta \tag{2.12}$$

ed essendo $\omega^2 \sim \frac{GM}{r^3}$ l'espressione a secondo membro è $\sim 6\frac{GM}{r^3}\delta$.
Si ottiene infine:

$$\frac{m}{M} \geq 12\left(\frac{\delta}{r}\right)^3 \tag{2.13}$$

Se definiamo (nel caso del Sistema Solare):

$$M = \rho_\odot \frac{4}{3}\pi R_\odot^3 \tag{2.14}$$

e

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho\delta^3 \tag{2.15}$$

La condizione precedente diventa equivalente a porre

$$\frac{\rho\delta^3}{\rho_\odot R_\odot^3} \geq 12\frac{\delta^3}{r^3} \tag{2.16}$$

ossia, (ridefinendo r=a)

$$\rho \geq \rho_{\odot} 12 \left(\frac{R_{\odot}}{a}\right)^3 \tag{2.17}$$

Facendo i calcoli con un modello più accurato si ottiene invece

$$\rho \geq \left(\frac{1.44 R_{\odot}}{a}\right)^3 \rho_{\odot} \sim \frac{M_{\odot}}{a^3} \tag{2.18}$$

La condizione critica si ha quando la densità iniziale nel disco supera quella che avrebbe il sole espanso ad occupare una sfera di raggio a.

Per $a \sim a_{Giove} \quad \rho_{CR} \sim 4 \cdot 10^{-9} g/cm^3$.

Usando le considerazioni precedenti, nell'ipotesi di un disco gassoso il cui spessore (come detto) non è trascurabile, ed il cui volume è quindi non troppo minore di quello di una sfera di uguali dimensioni, è possibile dimostrare che, alla stessa distanza,

$$\rho(0) \sim (100q) \cdot 10^{-10} g/cm^3 \tag{2.19}$$

dove $M_{disco} = qM_{\odot}$. Nei modelli alla Safronov $q \sim 10^{-2}$ e $q(0) \ll \rho_{CR}$. Solo se $q \sim 1$ (modelli alla Cameron) le condizioni critiche sono verificate.

2.2.4 Dal criterio di Jeans: caso di disco sottile

Come vedremo nei prossimi paragrafi, la limitazione sopra esposta può essere superata prendendo in considerazione la possibilità che la componente "polverosa" della nebula primordiale possa sedimentare a formare un disco molto più sottile, in cui è piú facile il raggiungimento della densità critica. Diventa quindi interessante riprendere in esame il problema accettando anche in via di ipotesi che il disco originario sia abbastanza o molto sottile.

È possibile impostare i calcoli per l'instabilità anche estendendo il criterio di Jeans (v. cap.1).

Tra i casi discussi nel capitolo precedente c'è anche quello di un sistema in rotazione differenziale (kepleriana); si noti ancora una volta però che quel modello non prevede anche un gradiente del campo gravitazionale e quindi non si attaglia perfettamente al nostro problema. Nondimeno era già possibile ottenere un risultato simile al limite di Roche, ed è anche possibile estendere l'analisi alla Jeans tenendo conto dello spessore finito del disco. Il problema non è troppo semplice e non sarà qui discusso a fondo (si veda il libro di Bertotti e Farinella, op.cit.). In questa sede ci limitiamo ad una discussione molto qualitativa. In sostanza il criterio di Jeans porta, per il caso di disco spesso (ossia quando lo spessore del disco non vincola le caratteristiche strutturali ed evolutive del sistema), ad una condizione critica per la densità, che è quella che abbiamo discusso in precedenza. Se questa condizione viene soddisfatta, possono allora svilupparsi delle condensazioni sulla base della relazione di dispersione (1.84) che costituisce il criterio di Jeans.

Quale massa avranno queste condensazioni? Se l'instabilità avviene nel disco gassoso, formato prevalentemente di idrogeno molecolare, si possono usare i risultati del capitolo 1 (nell'ipotesi che la densità sia abbastanza superiore a quella critica, in modo che l'espressione sotto radice nella (1.85) non sia troppo diversa da $4\pi G\rho_0$) . Se ci mettiamo nella zona di Giove, e ammettiamo che la temperatura sia dell'ordine di $100K$ la relazione massa–densità sarà simile alla

(1.8) con un coefficiente moltiplicato per un fattore 10^3. Infatti dalla (1.58) si vede che la massa di Jeans scala con $T/{m_p}^{3/2}$ e quindi aumentare la temperatura da 10 a $100K$ implica questa variazione del coefficiente a moltiplicare $(M/M_\odot)^2$. A densità dell'ordine dei $10^{-9} g/cm^3$, come quella critica (vedi il paragrafo precedente) corriponde quindi una massa di Jeans dell'ordine di un millesimo della massa del Sole (vale a dire la massa di Giove). Le condensazioni alla Jeans che nascono dal disco gassoso sono quindi molto massicce, e sembrano dover portare alla formazione di pianeti giganti. Se pensiamo però a instabilità che coinvolgano la componente polverosa, dobbiamo prendere come massa tipica delle particelle un valore $m_{polv} \sim 10^{-12} g$ (o qualcosa del genere). Per questo effetto la massa di Jeans diminuisce di ben 18 (!!) ordini di grandezza, e diventa quella di un corpo solido più piccolo di un centinaio di metri. Diventa allora interessante studiare soprattutto la crescita di instabilità piú grandi e capire se lo spessore finito del disco non possa introdurre una limitazione superiore.

In effetti è cosi̇̀. Si può argomentare che la massima massa di una condensazione è quella in cui la lunghezza d'onda diventa dello stesso ordine di grandezza dello spessore del disco (H); se la densità è dello stesso ordine di ρ_{crit} si ha allora:

$$m_{pl} \leq H^3 \rho_{crit} \tag{2.20}$$

Se il disco è sottile, da semplici considerazioni geometriche si può concludere che, a livello di ordine di grandezza,

$$M_{disco} \sim M_\odot H/a \tag{2.21}$$

da cui

$$m_{pl} \leq (M_{disco}/M_\odot)^3 a^3 \rho_{crit} \sim (M_{disco}/M_\odot)^3 M_\odot \tag{2.22}$$

Come vedremo, nei modelli "alla Safronov" la massa del *disco di polvere* è dell'ordine di $10^{-4} M_\odot$. Ne risultano planetesimi di massa $\sim 10^{-21} g$, corrispondenti a condensazioni solide dell'ordine di qualche decina di chilometri.

2.2.5 Modello semplice: leggi di conservazione in un disco molto sottile

Un risultato abbastanza simile si ottiene nell'ambito di un modello qualitativamenyte diverso (in sostanza bidimensionale) particolarmente adatto per il caso di un disco molto sottile. Studiamo questo caso sia come utile esercizio per capire i problemi in termini di fondamentali leggi di conservazione, sia anche per superare una possibile obiezione. Se la sedimentazione in disco molto sottile portasse la densità a superare nettamente il valore critico, a parità di massa del disco e quindi a parità di densità superficiale $\sigma = \rho H$ la massa dei frammenti calcolati secondo il criterio di Jeans diminuirebbe per un fattore ${\rho/\rho_{crit}}^2$. Ma in questo caso potrebbero anche aversi delle instabilità bidimensionali, per esempio tali da formare prima degli anelli sottili e poi, mediante rottura di questi, dei frammenti protoplanetari (instabilità di questo tipo sono state studiate in letteratura).

Introduciamo quindi un modello di disco "freddo" e sottile, in cui tutte le particelle percorrono orbite kepleriane circolari, e verificando il ruolo centrale delle leggi di conservazione di energia (E) e momento angolare (L).

Si vuole studiare l'evoluzione di un anello a distanza minima r_0 dal Sole e largo δr (che si assume relativamente piccolo, in modo da rendere ragionevoli degli sviluppi in serie e l'ipotesi di densità costante nella zona).

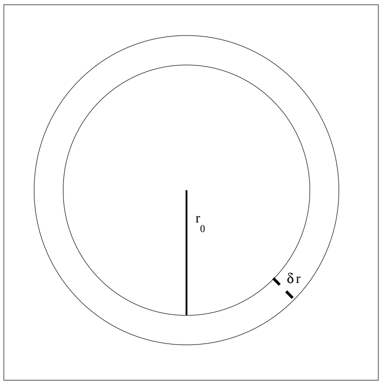

Figura 2.2: Modello di anello

Tale anello ha massa

$$m_r = 2\pi\rho H\delta\rho(r_0 + \delta r/2) \tag{2.23}$$

mentre ovviamente $dm = 2\pi\rho H r dr$.

$$L = \int \sqrt{GM_\odot} r^{1/2} dm = \sqrt{GM_\odot} 2\pi\rho H \int r^{3/2} dr \tag{2.24}$$

$$E = -1/2 GM_\odot \int \frac{dm}{r} = -1/2 GM_\odot 2\pi\rho H \delta r \tag{2.25}$$

Se volessimo concentrare tutta la materia ad una distanza data, la conservazione di L e E ci darebbe

$$L = \int \sqrt{GM_\odot} r^{1/2} dm = R_L^{1/2} \sqrt{GM_\odot} m_r \tag{2.26}$$

$$E = -\frac{1}{2} GM_\odot \int \frac{dm}{r} = -\frac{1}{2} \frac{GM_\odot}{R_E} m_r \tag{2.27}$$

Sviluppando i calcoli precedenti, e limitandoci al secondo ordine in $\delta r/r$, si ha:

$$R_L^{1/2} = r_0^{1/2}[1 + 3/4(\delta r/r_0) + 1/8(\delta r/r_0)^2]/[1 + (\delta r/r_0)] = r_0^{1/2}[1 + 1/4(\delta r/r_0)] \tag{2.28}$$

da cui:

$$R_L = r_0[1 + 1/2(\delta r/r_0) + 1/16(\delta r/r_0)^2] \tag{2.29}$$

mentre

$$R_E = r_0[1 + (\delta r/r_0)] \tag{2.30}$$

Ora
$$R_L = R_E + r_0(\delta r/4r_0)^2, \tag{2.31}$$
ossia
$$\frac{R_L}{R_E} \sim 1 + \left(\frac{\delta r}{4r}\right)^2 \tag{2.32}$$
Questo fa sì che la condensazione porti a dover superare un gap di energia
$$\Delta E \sim -\frac{GM_\odot m_r}{r}\left[\left(\frac{\delta r}{4r}\right)_f^2 - \left(\frac{\delta r}{4r}\right)_{in}^2\right] \sim \frac{GM_\odot m_r}{r}\left(\frac{\delta r}{4r}\right)_{in}^2 \tag{2.33}$$
L'energia che si può recuperare è quella gravitazionale dovuta alla cambiata struttura dell'anello):
$$\Delta E_{grav} \sim \frac{Gm_r^2}{r} \tag{2.34}$$
Ciò resta vero anche per anelli sufficientemente stretti e sottili, pur di non avvicinarsi troppo ai casi singolari.

Per l'instabilità deve essere
$$\Delta E_{grav} \geq \Delta E \tag{2.35}$$
cioè
$$\frac{Gm_r^2}{r} \geq \frac{GM_\odot m_r}{r}\left(\frac{\delta r}{4r}\right)^2 \tag{2.36}$$
ossia
$$\frac{m_r}{M_\odot} \geq \left(\frac{\delta r}{4r}\right)^2 \tag{2.37}$$
Essendo d'altra parte
$$m_r \sim 2\pi r\langle\rho(r)\rangle H\Delta r \tag{2.38}$$
ossia
$$\delta r \sim \frac{m_r}{2\pi r\langle\rho\rangle H} \tag{2.39}$$
si ha
$$m_r - M_\odot\frac{m_r^2}{64\pi^2 r^4\langle\rho\rangle^2 H^2} \geq 0 \tag{2.40}$$
e quindi
$$m_r < \frac{64\pi^2 r^4\langle\rho\rangle^2 H^2}{M_\odot} \tag{2.41}$$

Approssimativamente

$$m_r \leq \frac{M_{disco}^2}{M_\odot} \tag{2.42}$$

Per un disco di polvere

$$m_r < 10^{-8} M_\odot \sim 10^{25} g \tag{2.43}$$

Se poi l'anello si spezza in tante condensazioni a proiezione circolare (ricordiamo che stiamo ragionando nell'ambito di un modello bidimensionale) avremo presumibilmente una relazione del tipo (ancora a meno di coefficienti non troppo diversi dall'unità, compreso, in questo caso, un fattore 2π) $m_{pl} \sim m_r r/\delta r$.

Avremo quindi:

$$m_{pl} \sim m_r / M_{disco} m_r \tag{2.44}$$

da cui si trova ancora una relazione come la (2.22).

2.3 Schema alla Safronov:sedimentazione della componente polverosa in disco di piccola massa ed instabilità nella polvere

Abbiamo visto come la formazione delle instabilità gravitazionali del disco nel suo complesso sia possibile solo se $M_{disco} \sim M_\odot$ (modello alla Cameron). Lo schema di formazione che parte da un disco di massa piccola $10^{-2} \div 10^{-1} M_\odot$ fa invece appello ad un meccanismo diverso, basato sulla sedimentazione della componente polverosa, i grani, verso il piano equatoriale.

A proposito, quanto piccola puó essere la massa del disco? Un caso di disco minimale puó essere ottenuto riequilibrando le abbondanze relative, osservate sui vari pianeti, con una aggiunta opportuna di massa che possa restituire alla nebulosa protoplanetaria iniziale la stessa composizione del Sole; in altri termini, se per esempio, l'abbondanza di idrogeno e di elio su Giove risulta del 90% complessivo invece del 98% solare, si puó ipotizzare una massa iniziale di idrogeno e di elio, nella zona di Giove, cinque volte maggiore dell'attuale. E cosí via, con un incremento assai maggiore nella zona dei pianeti esterni. Il risultato complessivo é quello di una nube di massa compresa fra 0.01 e 0.02 masse solari, con una densitá **superficiale** che decresce con la potenza 3/2 della distanza dal Sole (Weidenschilling, 1977).

I modelli "alla Safronov" partono da dischi di massa minimale o leggermente superiore, ossia compresa fra il 2 e il 10 percento della massa solare.

In questi modelli si ha una rapida sedimentazione della componente solida, a formare un disco sottile di polvere. In questo disco si avviano rapidamente fenomeni di accrezione, che portano alla creazione di blocchi solidi di dimensione intorno al metro. La possibilità di una condensazione successiva dipende anche dallo spessore del disco.

Se vale una rigorosa equiripartizione, $T_{gas} = T_{polvere}$ e quindi, all'equilibrio, che viene raggiunto in tempi non troppo lunghi in assenza di forte turbolenza del gas,

$$\left(\frac{H}{a}\right)_{polvere} = \left(\frac{akT}{GMm_{polv.}}\right)^{1/2} = \left(\frac{H}{a}\right)_{gas} \cdot \left(\frac{m_{gas}}{m_{polv.}}\right)^{1/2} \tag{2.45}$$

Se per es. $m_{polv.} \sim 10^{-12} g \sim 10^{12} m_{gas}$, il disco di polvere è più sottile di un fattore 10^6.
Qual è la condizione per l'instabilità ?
Alla Roche:

$$\rho_{CR(p)} \sim \frac{M_\odot}{a^3} = \rho_{gas} X_{polvere} \frac{H_{gas}}{H_{polvere}} \tag{2.46}$$

se $M_{disco} \sim 10^{-2} M_\odot$ e $\rho_{CR(p)} = 40 \rho_{gas}$ e quindi

$$X_p \frac{H_{gas}}{H_{polvere}} \geq 40 \tag{2.47}$$

Prendendo $X_p \sim 1/100$, $H_p/H_g \sim 1/2000$: la polvere deve essere addensata di alcune migliaia di volte rispetto ad un distribuzione uniforme, meno del 10^6 teorico, ma molto ancora se il gas è turbolento.

In effetti la presenza di turbolenza residua in questa fase costituisce un grosso problema della teoria. La situazione non é del tutto chiara. Se in effetti la turbolenza dovesse impedire una sufficiente sedimentazione del disco di polvere diventerebbe necessario trovare un diverso meccanismo per passare dalle condensazioni di un metro a quelle di alcuni chilometri, necessarie per innescare le fasi successive dell'accumulazione (Weidenschilling, Cuzzi, 1993).

Se invece tutto va bene, si formano degli embrioni protoplanetari di qualche decina di chilometri, come si può qualitativamente capire dalle considerazioni svolte nei paragrafi precedenti.

2.4 Crescita dei protopianeti.

Una volta formatesi le prime aggregazioni (i *planetesimi*) l'evoluzione successiva è pilotata dalle collisioni. Esse possono essere distruttive quando la velocità relativa d'impatto eccede la velocità di fuga v_e di molto, conducono invece ad un accrescimento del corpo più piccolo (da qui in avanti chiamato "proiettile") sul più massiccio ("bersaglio") quando la velocità è sufficientemente piccola; in questo caso le orbite sono tutte approssimativamente circolari e si accumulano molti piccoli pianeti. Solo quando $v_r \sim v_e$ (si noti che per velocità relativa si intende quella all'infinito, non quella di impatto vera e propria, aumentata dall'attrazione gravitazionale del bersagli) il processo di accumulazione potrà aver luogo ed essere efficace.

Consideriamo i planetesimi con un dato semiasse maggiore a; se e è l'eccentricità media i corpi che potranno incontrarsi saranno compresi in una fascia di larghezza ea. Lo stesso discorso può farsi anche per l'inclinazione. La velocità relativa sarà dell'ordine di ena (n è il moto medio; si noti che sia qui come in seguito faremo sempre l'ipotesi, confortata dall'esperienza, che l'eccentricità e l'inclinazione medie siano dello stesso ordine di grandezza; le velocità relative potranno essere indifferentemente stimate a partire da e o da i, e così gli altri parametri in gioco). La velocità relativa v_r è aumentata progressivamente dagli incontri elastici, e diminuita (ovviamente) da quelli anelastici.

Per questo calcolo, evidentemente semplificato, faremo l'ipotesi che tutti i planetesimi abbiano uguale massa m_{pl} e raggio r_{pl}; discuteremo in seguito che cosa cambia se si abbandona questa ipotesi. Se, nella zona che stiamo considerando, la densità superficiale di materia è σ, la densità numerica dei planetesimi potrà essere valutata in $\sigma n / m_{pl} v_r$ (questo perché, sulla base delle considerazioni precedentemente fatte, lo spessore del disco può essere stimato in v_r/n).

Un incontro con parametro d'impatto b cambia la velocità; se $b > r_{pl}$ potremo stimare questa variazione di velocità secondo la relazione:

$$\delta v_r = \frac{G m_{pl}}{b^2} \frac{2b}{v_r} = \frac{2 G m_{pl}}{b v_r} \tag{2.48}$$

dove il primo fattore corrisponde ad una stima della accelerazione media e il secondo a quella del tempo di interazione.

Molti incontri portano ad una diffusione nello spazio delle velocità, ossia ad un aumento di e e di i, mediante un meccanismo tipo *random walk*.

I possibili valori di b identificano tre regimi:

a)

$$r_{pl} < b < \frac{G m_{pl}}{v_r^2} \equiv b_0 \tag{2.49}$$

In questo caso si ha un incontro ravvicinato, che causa una forte deflessione (infatti la (2.48) ci dice che nel momento di massima interazione l'energia potenziale di interazione sovrasta l'energia cinetica all'infinito).

b) Quando invece:

$$b > \left(\frac{m_{pl}}{3 M_\odot} \right)^{1/3} a = d_{Hill} \tag{2.50}$$

i due corpi interagiscono debolmente (si ricordi che la dimensione del lobo di Hill, definito all'interno del problema ristretto dei tre corpi, definisce sostanzialmente la zona in cui l'influenza del pianeta prevale su quella solare; sono anche possibili definizioni leggermente diverse della zona di influenza, che però, sulla base delle considerazioni che faremo tra un momento, non alterano significativamente i risultati).

L'equazione (2.49) si può anche scrivere nella forma:

$$d = \left(\frac{\rho_{pl}}{3 \rho_\odot} \right)^{1/3} r_{pl} \, \frac{a}{R_\odot} \tag{2.51}$$

e ponendo $\rho_{pl}/3\rho_\odot \simeq 1/4$ e $a/R_\odot \simeq 10^3$ (valori stimati per la zona di Giove), si ha $d \simeq 600 r_{pl}$.

c) Il caso più significativo è invece quello intermedio, quando cioè

$$b_0 \, < \, b \, < \, d;$$

analizzeremo quindi l'effetto di questi incontri a distanza intermedia, utilizzando comunque un formalismo intrinsecamente estendibile anche al caso a).

Consideriamo l'effetto degli incontri con $b \in [b, b+db]$; un corpo subisce in un tempo dt

$$2\pi b \, db v_r \, dt \left(\frac{\sigma n}{m_{pl} v_r} \right)$$

incontri di questo tipo; ognuno di essi causa una deflessione δv_r di direzione e verso casuali; la media di δv_r sarà quindi nulla; ma non è nulla la variazione quadratica; secondo la logica del *random walk* avremo quindi una velocità relativa che aumenta progressivamente nel tempo, sulla base dell'equazione:

$$\left[\frac{dv_r^2}{dt} \right]_{enc} = \int_{r_{pl}}^{d} 2\pi b v_r \frac{\sigma n}{m_{pl} v_r} \left(\frac{2Gm_{pl}}{b v_r} \right)^2 db \tag{2.52}$$

La dipendenza dell'integrale dai limiti di integrazione è logaritmica, quindi non critica:

$$\left[\frac{dv_r^2}{dt} \right]_{enc} = 2\pi \frac{\sigma n}{m_{pl}} \left(\frac{2Gm_{pl}}{v_r} \right)^2 \ln \left(\frac{d}{r_{pl}} \right) \tag{2.53}$$

e, usando la definizione di

$$v_e = \sqrt{\frac{2Gm_{pl}}{r_{pl}}}$$

essendo quindi $2Gm_{pl} = v_e^2 r_{pl}$, si ha:

$$\left[\frac{dv_r^2}{dt} \right]_{enc} = 2\pi \frac{\sigma n}{m_{pl}} \frac{v_e^4 r_{pl}^2}{v_r^2} \ln \left(\frac{d}{r_{pl}} \right) \tag{2.54}$$

In parallelo si hanno invece dei fenomeni di collisione vera e propria, che causano, ovviamente, processi anelastici ed implicano quindi la diminuzione, l'annullamento nel caso specifico, della velocità relativa. La sezione d'urto (almeno finché v_r non è troppo piccola rispetto a v_e) è dell'ordine di πr_{pl}^2. Poiché in un impatto la perdita di velocità relativa è $\simeq -v_r$, si avrà:

$$\left[\frac{dv_r}{dt} \right]_{imp} = -\pi r_{pl}^2 \frac{\sigma n}{m_{pl}} v_r \tag{2.55}$$

dove l'espressione a destra è uguale al prodotto di πr_{pl}^2 (sezione d'urto geometrica) per la densità numerica $(\sigma n / m_{pl} v_r)$ per la velocità relativa v_r per la variazione di velocità $-v_r$.

D'altro canto, dalla si ha, in termini del modulo della velocità relativa:

$$\frac{dv_r^2}{dt} = 2 v_r \frac{dv_r}{dt}$$

da cui, combinando (2.53) e (2.54):

$$\frac{dv_r}{dt} = \left[\frac{dv_r}{dt} \right]_{enc} - \left[\frac{dv_r}{dt} \right]_{imp} = \pi \frac{\sigma n}{m_{pl}} r_{pl}^2 v_r \left[\left(\frac{v_e}{v_r} \right)^4 \ln \left(\frac{d}{r_{pl}} \right) - 1 \right] \tag{2.56}$$

La (2.55) permette di definire un tempo scala:

$$\tau \simeq \frac{m_{pl}}{\pi r_{pl}^2 \sigma n} \tag{2.57}$$

che è di solito piccolo rispetto ai tempi di crescita di un tipico embrione planetario.

Approssimativamente, per un disco sottile ma non molto sottile (come nella discussione del paragrafo 2.2.4), usando la (2.20) ed essendo $\sigma \sim \rho_{crit} H$, si ha, in funzione del periodo di rivoluzione $T = 2\pi/n$:

$$\tau \sim T/(2\pi^2)(H/r_{pl})^2 \sim T/(2\pi^2)(\rho_{pl}/\rho_{crit})^{2/3} \tag{2.58}$$

che può essere stimato dell'ordine di 10^6 anni.

In un tempo τ il sistema si avvicina ad uno stato stazionario caratterizzato da un valore di v_r vicino a v_e (come si deduce facilmente dalla forma del termine in parentesi nella eq. (2.55).

Se i protopianeti non hanno tutti la stessa massa, si ha un meccanismo di crescita del più grosso molto più rapida rispetto alla crescita degli altri (crescita *runaway*). Ciò avviene, in sostanza, a causa del contributo *gravitazionale* alla sezione d'urto di impatto:

$$\sigma_{imp} \simeq \pi b_i^2 \simeq \pi r_{pl}^2 \left(1 + \frac{v_e^2}{v_\infty^2}\right) \tag{2.59}$$

la quale, almeno per piccoli valori della velocità relativa all'infinito v_∞ risulta proporzionale a r_{pl}^4. La crescita rapida del frammento più grosso gli consente di determinare essenzialmente la dinamica dell'intera zona. Si può dimostrare che in questo caso la velocità relativa tende ad un valore di regime dato dalla relazione:

$$v_r^2 = \frac{Gm_1}{\theta r_1} \tag{2.60}$$

dove m_1 e r_1 sono massa e raggio del maggiore embrione planetario, e θ è un parametro adimensionale (detto "di Safronov" dal nome del planetologo russo autore della presente teoria dell'accumulazione planetaria) il cui valore numerico non è lontano dall'unità (generalmente lo si valuta compreso tra 1 e 10; talora può assumere anche valori maggiori, fino a 100).

2.5 Formazione dei pianeti giganti e dei corpi minori.

Quando gli embrioni planetari dei pianeti maggiori cominciano a crescere, la velocità relativa v_r cresce, sulla base della eq. (2.59); ciò corrisponde ad un aumento di eccentricità ed inclinazione, che a sua volta rende sempre più ampia la "fascia di cattura"; le zone corripondenti ai vari pianeti cominciano a sovrapporsi, causando così l'esaurirsi del materiale disponibile per il processo di accumulazione; inoltre la materia può raggiungere tali velocità da essere espulsa al difuori del Sistema Solare, o spinta molto vicina al Sole.

Ipotizzando, per semplicità, un embrione planetario in orbita esattamente circolare, la velocità relativa *critica*, che permetterà l'espulsione dal Sistema Solare quando diretta lungo il moto orbitale, e nel suo stesso verso, sarà:

$$v_r = v_{ej} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{GM_\odot}{a}} \qquad (2.61)$$

corrispondente a:

$$\theta_{ej} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} \frac{m_1}{M_\odot} \frac{a}{r_1} \qquad (2.62)$$

Per i pianeti esterni nella fase finale di accumulazione questo implica un valore massimo di θ dell'ordine di 100, valore maggiore, di molto o di poco che sia, di quanto correntemente stimato.

L'espulsione di una consistente quantità di materia nelle fasi finali di accumulazione appare quindi come un dato acquisito, che può certamente spiegare la distribuzione di massa presente nel Sistema Solare attuale e riconciliarne i valori presenti con quelli previsti dai modelli di formazione (almeno con quelli "alla Safronov" che richiedono una massa non troppo grande della nebulosa primordiale circumsolare). Un'altra rilevante quantità di materia viene inserita in orbite molto larghe (e molto eccentriche, data la dinamica); quando sono vicini all'afelio questi corpi possono poi essere ulteriormente influenzati dalla perturbazione gravitazionale di altre stelle, ed assestarsi su una orbita finale tutta all'esterno del Sistema Solare che noi conosciamo; dovrebbe essere questa l'origine della cosiddetta *nube di Oort*, serbatoio -quasi- inesauribile di comete. I processi di espulsione di materia fanno rinculare i pianeti in fase di crescita, e li fanno lentamente spiralizzare verso l'interno; ciò causa sicuramente rilevanti perturbazioni nella zona interna del Sistema Solare, specialmente in connnessione con il fenomeno delle *risonanze* e può essere una concausa e della mancata accumulazione di un unico pianeta nella zona degli asteroidi e, in qualche misura, anche della minore massa di Marte rispetto alla Terra.

Ci sono inoltre un certo numero di corpi che vengono deflessi non verso l'esterno del Sistema, ma verso l'interno; in tal caso possono arrivare, al perielio, ad una distanza dal Sole di circa 1/5 rispetto alla distanza alla quale sono stati perturbati (questo nell'ipotesi di un Δv_r equivalente a quello critico per l'espulsione). Anche ciò è sicuramente legato alla storia della fascia asteroidale.

Al di là dei processi iniziali di formazione e accumulazione, è evidente l'importanza, anche in tempi successivi, di una evoluzione collisionale caratterizzata da alte velocità relative, dovuta sia alla presenza di questi proiettili "intrusi" sia, successivamente, a quella dei prodotti dei successivi episodi collisionali catastrofici.

2.6 La legge di Titius-Bode:formulazione alla Armellini e legame con lo schema S

Ipotesi:

I pianeti catturano tutto quello che possono nelle rispettive zone di cattura

Le zone di cattura sono contigue e non si sovrappongono.

Cattura geometrica: se $\langle e \rangle$ è l'eccentricità media dei corpi piccoli, un protopianeta cattura in una zona

$$\Delta a \sim \langle e \rangle a \qquad (2.63)$$

Cattura gravitazionale: applicando la fisica dei tre corpi, la zona di cattura è del tipo:

$$\Delta a \sim \left(\frac{m_{pl}}{M_{\odot}}\right)^{\xi} a \tag{2.64}$$

dove ξ può essere stimato in 1/3 (lobo di Hill) o 1/4 (Dole 1960).
Nell'ipotesi semplificata che sia

$$\Delta a_{tot} = \Delta a_{geom} + \Delta a_{grav}$$

si ottiene

$$\Delta a_{tot} \sim \left[\langle e\rangle + \left(\frac{m_{pl}}{M_{\odot}}\right)^{\xi}\right] a \tag{2.65}$$

Se si ammette che $\langle e\rangle$ vari lentamente con a, essendo ξ piccolo e la prevedibile escursione delle masse protoplanetarie m_{plan} non troppo grande, risulta l'equazione approssimata:

$$\Delta a_{tot} \sim cost.a = ca \tag{2.66}$$

e, nell'ipotesi di contiguità e non sovrapposizione:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{\Delta a_n}{2} + \frac{\Delta a_{n+1}}{2} \tag{2.67}$$

ossia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + c/2}{1 - c/2} = c' \tag{2.68}$$

che è la legge di Titius-Bode nella formulazione esponenziale approssimata di Armellini (che ne contiene probabilmente tutto il senso fisico e che vale, con c' diversi, anche per i sistemi satellitari); le deviazioni dalla (2.67) devono evidentemente favorire "l'isolamento" dei pianeti e dei satelliti maggiori, ed è quanto si verifica in realtà.

Queste considerazioni sono state recentemente raffinate, tenendo conto di diversi effetti meccanici; la (2.63), tenendo conto degli effetti delle risonanze (Wisdom, 1980, Lissauer, 1995), potrebbe prendere la forma:

$$\Delta a \sim \left(\frac{m_{pl}}{M_{\odot}}\right)^{2/7} a \tag{2.69}$$

Come si vede l'esponente é leggermente diverso, ma ancora compreso tra i limiti sopra discussi (1/3, 1/4).

2.7 Caratteristiche dei sistemi planetari; scaling–laws e problematiche aperte

Oltre che alla riscoperta della legge di Titius–Bode le considerazioni in questione possono anche essere applicate a far previsioni sulle caratteristiche di altri sistemi planetari.

Usiamo infatti una relazione generale del tipo della (2.63):

$$\Delta a \sim (m_{pl}/M_*)^\gamma a \tag{2.70}$$

dove M_* è la massa della stella intorno a cui orbita il sistema. Si ha allora:

$$m_{pl} = 2\pi a\sigma\Delta a = 2\pi a^2\sigma(m_{pl}/M_*)^\gamma \tag{2.71}$$

ossia

$$m_{pl}^{1-\gamma} = 2\pi a^2\sigma M_*^{-\gamma} \tag{2.72}$$

da cui

$$m_{pl} \propto a^{2/(1-\gamma)}\sigma^{1/(1-\gamma)}M_*^{-\gamma/(1-\gamma)} \tag{2.73}$$

ed essendo la massa del disco:

$$M_{disco} = a^2\sigma \tag{2.74}$$

si ottiene che:

$$m_{pl} \propto M_{disco}^{1/(1-\gamma)}M_*^{-\gamma/(1-\gamma)} = M_{disco}[M_{disco}/M_*]^{\gamma/(1-\gamma)} \tag{2.75}$$

Ne consegue che il numero dei pianeti, che e' dell'ordine del rapporto fra la massa totale del disco e quella del singolo pianeta, puó essere stimato come:

$$N_p = M_{disco}/m_{pian} \propto [M_{disco}/M_*]^{-\gamma/(1-\gamma)} \tag{2.76}$$

Si puó quindi trarre una conclusione estremamente interessante: i sistemi caratterizzati da un disco piú massiccio producono, presumibilmente, meno pianeti ma piú grossi. Dischi di massa molto piccola formano invece sistemi planetari numerosi ma fatti di corpi minori.

Le conclusioni non cambiano molto a seconda che si prenda $\gamma = 2/7$ o si usino il valore classico di $1/3$ (lobo di Hill) o quello di $1/4$ ottenuto mediante l'analisi del problema ristretto dei tre corpi (Dole 1960).

Si notino invece le problematiche aperte dalle recentri scoperte dei pianeti extrasolari. In generale i pianeti scoperti hanno masse maggiori di quella di Giove, e si trovano a distanza dalla stella molto minore della distanza di Giove dal Sole. Ciò crea problemi di consistenza con il modello alla Safronov, che favorisce l'accumulazione dei pianeti giganti, per crescita di grossi embrioni seguita da una cattura efficiente del gas circumstellare ancora presente, solo ad una distanza dal Sole di alcune $U.A.$. È pensabile che si debba ricorrere a modelli di formazione differenziati, recuperando magari anche i modelli alla Cameron. Alternativamente possiamo riflettere sul ruolo degli effetti di selezione osservativi, che permettono al momento di scoprire prevalentemente i pianeti (massicci e vicini) che sono stati scoperti. I pianeti scoperti potrebbero quindi essere solo una parte selezionata. Si noti che dal punto di vista osservativo masse dei dischi circumstellari simili a quelle presunte dal modello alla Safronov (alcuni percento della massa della stella centrale) sembrano abbastanza “normali” e solo pochi dischi hanno masse che si spingono a valori di qualche decimo. Non può però essere escluso che da dischi più massicci della media si siano formati, anche sulla base delle discussioni precedenti, sistemi planetari con diversi pianeti massicci come e più di Giove. In questo caso si potrebbero attivare processi dinamici (presenti nel caso di almeno 3 grossi pianeti) atti a spostare uno dei pianeti su una orbita molto più interna di quella originaria (“Jumping Jupiters”). Il dilemma, che sarà probabilmenmte chiarito dalla evoluzione del campione osservativo nei prossimi anni, è tra un modello di formazione differenziato e il modello alla Safronov, applicato a dischi di massa diversa, e con una successiva evoluzione dinamica; in questo caso, peraltro, i sistemi extrasolari noti sarebbero essenzialmente stati fortemente selezionati, e non costituirebbero ancora un campione statisticamente significativo.

Capitolo 3

Evoluzione collisionale nel sistema solare.

3.1 Caratteristiche generali dell'evoluzione collisionale.

L'evoluzione del Sistema Solare successiva alle fasi di formazione è dovuta prevalentemente a due distinti processi: l'evoluzione dinamica e l'evoluzione collisionale.

Il primo processo, del quale non ci occuperemo in questa sede, è dovuto alle interazioni gravitazionali nel sistema a molti corpi risultante dalle fasi di formazione. Come è noto dalla Meccanica Celeste, per un sistema di $n \geq 3$ corpi interagenti gravitazionalmente di solito non è possibile una integrazione analitica delle equazioni del moto, e non si hanno soluzioni esattamente periodiche. In altri termini le orbite sono solo approssimativamente quelle descritte dalle leggi di Keplero, e variano nel tempo, cambiando i parametri orbitali. Ciò nonostante, si ritiene che il Sistema Solare sia nel suo complesso *stabile*, ossia che non abbia subito e non debba subire in futuro una evoluzione dinamica globale che ne alteri le caratteristiche principali; per esempio, non ci aspettiamo la caduta di alcuno dei pianeti maggiori sul Sole o la sua espulsione dal Sistema Solare. Ma il discorso diventa molto diverso se includiamo nel calcolo anche i corpi minori, i satelliti, gli asteroidi e i vari corpi di tipo cometario. Effetti di particolare rilevanza sono prodotti da incontri ravvicinati, specie con i pianeti maggiori, e da fenomeni legati alle cosiddette *risonanze* che si verificano quando due o più corpi hanno periodi –per esempio, di rivoluzione– che stanno fra di loro in rapporti razionali semplici (cioè esprimibili con numeri razionali in cui sia numeratore sia denominatore sono non troppo lontani dall'unità). Incontri ravvicinati e risonanze possono cambiare drasticamente l'orbita di un corpo, mescolando anche zone molto diverse del Sistema: si hanno così scambi asteroidi–comete, e produzione di NEO (Near Earth Objects, oggetti la cui orbita incrocia quella terrestre) da asteroidi della Fascia Principale e da corpi di origine cometaria. L'evoluzione ordinaria delle orbite, dovute alle perturbazioni a molti corpi, permette prima o poi incontri ravvicinati superando eventuali meccanismi di protezione impliciti nelle condizioni iniziali. Per corpi molto piccoli (al massimo una decina di chilometri) una ulteriore evoluzione orbitale può essere innescata da fenomeni *non gravitazionali* come l'effetto Yarkovsky (dovuto al ritardo con cui la radiazione ricevuta dal Sole viene riemessa da un corpo rotante). L'evoluzione orbitale, inoltre, favorisce ed influenza anche le collisioni vere e proprie fra i corpi, ed interagisce quindi con l'evoluzione collisionale.

Passate le prime fasi del Sistema Solare, le collisioni successive avvengono tipicamente ad una notevole velocità relativa, che varia da qualche decina di chilometro al secondo (Sistema Solare interno) a diversi chilometri al secondo (asteroidi, pianeti giganti) a valori più ridotti nella zona più esterna. A questa velocità relativa *all'infinito* si deve ovviamente aggiungere l'effetto di accelerazione dovuto alla mutua interazione gravitazionale dei due corpi in fase di avvicinamento. Questo effetto è ovviamente dominante quando almeno uno dei due corpi è di grandi dimensioni, e la sua velocità di fuga eccede la velocità relativa all'infinito: un corpo non può ad esempio urtare la Terra a meno di $11,2km/s$ (naturalmente trascurando il possibile effetto di rallentamento dovuto all'atmosfera terrestre: effetto che è però importante solo se il proiettile è di moderate dimensioni: è insomma un meteorite). Ricordiamo infine che si usa chiamare **proiettile** il piú piccolo dei corpi coinvolti nella collisione, **bersaglio** l'altro.

Gli urti ad alta velocità comportano alcune conseguenze generali di grande importanza:

a) il fenomeno dell'erosione;

b) il fenomeno della craterizzazione;

c) il fenomeno della rottura catastrofica.

Il primo effetto è legato al fatto che in un impatto il proiettile viene generalmente distrutto e quindi, in linea di principio, catturato dal bersaglio. Ciò dovrebbe provocare un aumento della massa di quest'ultimo.

Se però la velocità d'impatto è grande, la materia espulsa dal cratere formato dall'impatto potrà in parte sfuggire al pianeta bersaglio. Ciò rende possibile un bilancio negativo della massa complessiva. Il problema è estremamente complesso ed una sua discussione richiederebbe una analisi accurata dei vari effetti, dovuti alla composizione chimica ed alla struttura fisica della superficie planetaria, nonchè alla rotazione del bersaglio (i relativi effetti di *angular momentum drain* e di *splash* possono avere rilevanti conseguenze anche sulla rotazione successiva del bersaglio, causando una perdita di massa selezionata in base al momento angolare specifico, e quindi alla direzione di eiezione). A titolo di esemplificazione semiqualitativa riportiamo la figura 3.1 che ci dice che tutti gli asteroidi (il più grande, Cerere, ha velocità di fuga inferiore a $1km/s$; in genere la velocità di fuga di un corpo di media densità, espressa in m/s, è dell'ordine del suo raggio espresso in chilometri; per gli asteroidi le tipiche velocità d'impatto sono di $5-6km/s$) e anche la Luna (le velocità di impatto tipiche contro di essa sono superiori ai $20km/s$) sono ancora oggi tipicamente oggetto di processi erosivi. Il discorso cambia quando si prendono in esame i pianeti, compresa la Terra.

I fenomeni descritti in b) e c) hanno conseguenze ancora più rilevanti. Un urto produce un cratere (e ne sono evidenti le tracce in tutte le immagini di superfici solide planetarie inviateci dalle sonde negli ultimi anni, da Mercurio ai satelliti di Nettuno, tutti riccamente craterizzati spesso al limite della saturazione); se poi l'urto è troppo energetico può causare la completa distruzione del bersaglio (impatto catastrofico); per i corpi minori, in cui gli urti sono comunque erosivi (non comportano mai aumento di massa), $m_{fin} < m_{in}$.

Si può allora definire il parametro f_1, così definito:

$$f_1 = \frac{m_{frammento\,maggiore}}{m_{bersaglio}} \tag{3.1}$$

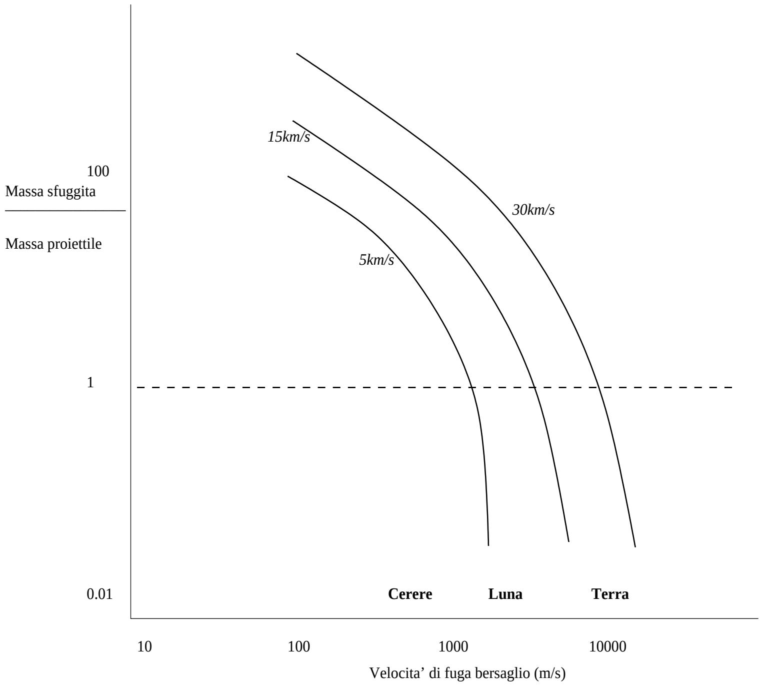

Figura 3.1: adattata da [Melosh], relazione fra la massa sfuggita M_{esc} in unità di quella del proiettile M_p (la retta orizzontale di ordinata uguale a 1 rappresenta ovviamente il caso di equilibrio fra massa acquistata e massa perduta) e la velocità di fuga del bersaglio, per diverse curve corrispondenti a differenti velocità di impatto (la velocità di fuga è espressa in m/s, mentre le velocità di impatto sono date in km/s).

Ovviamente f_1 è sempre compreso fra 0 e 1. Un urto viene per convenzione definito "catastrofico" quando $f_1 < 0.5$. Altrimenti si parla di "craterizzazione" (a rigore, la transizione non è del tutto ben definita, in quanto non si osservano crateri per i quali f_1 sia di poco superiore a 0.5; comunque dal punto di vista dell'energia richiesta la transizione è piuttosto netta, e il problema non ha rilevanti conseguenze in pratica).

Anche le conseguenze dei fenomeni catastrofici sono osservabili direttamente in alcune immagini di satelliti (Iperione, satellite di Saturno, macigno irregolare di ben $400km$ di lunghezza, ne è forse l'esempio più celebre) e indirettamente fra gli asteroidi.

3.2 Fenomenologia sperimentale e astronomica (craterizzazione).

La prima domanda a cui si deve rispondere quando si parla della formazione di crateri da impatto è ovviamente: *Quanto è grande il proiettile che ha formato un cratere di date dimensioni?*

La domanda non ha una risposta immediata e generale, date le disparate condizioni che possono verificarsi. Una certa luce venne, fin da molti anni addietro, dagli esperimenti sui crateri fatti da esplosioni sperimentali (Lampson, 1950). Le dimensioni del cratere d scalano in modo semplice con l'energia E dell'esplosivo:

$$d \simeq E^{1/3} \tag{3.2}$$

Numerose evidenze sperimentali (e considerazioni teoriche) permettono di stabilire l'*analogia impatti-esplosioni* (in sostanza in ambedue i casi ci troviamo con una grossa quantità di energia fortemente concentrata in una zona, e che successivamente si diffonde nel restante volume del bersaglio), anche se nello stabilire tale equivalenza occorre decidere a quale profondità si colloca la carica esplosiva (generalmente la migliore analogia vale quando tale profondità è dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni del proiettile).

Questa analogia permette di introdurre, anche per i crateri, un sostanziale *energy-scaling*: infatti, avendo i crateri grosso modo una forma non troppo dipendente dalle dimensioni, la proporzionalità espressa dalla (3.2) equivale sostanzialmente ad una proporzionalità tra il volume V del cratere e l'energia d'impatto. Quest'ultima è d'altra parte proporzionale alla massa del proiettile per il quadrato della velocità di impatto; se velocità d'impatto e densità sono prese come costanti, ciò implica in sostanza che il volume del cratere è proporzionale al volume del proiettile, ossia che $d_c \propto l_p$ (l_p è il raggio medio del proiettile).

L'effetto della autogravitazione del bersaglio complica un po' la situazione. Il materiale scavato nel cratere deve essere sollevato dal fondo, e questo implica una variazione di energia potenziale:

$$\Delta U = m_{cratere}\, g \Delta h$$

dove Δh è proporzionale a d_c; ne consegue che $\Delta U \propto d_c^4$, laddove le altre energie in gioco scalano con la massa, ossia con d^3. Al limite, per crateri molto grandi, varrà allora la relazione:

$$d \propto \left(\frac{E}{\rho g}\right)^{1/4} \tag{3.3}$$

In effetti nei crateri formati dalle esplosioni nucleari si è trovata una dipendenza $d \propto E^{(1/3.4)}$ intermedia tra i due regimi normale e di gravità; nella realtà il problema è un po' più complesso, e le caratteristiche del cratere dipendono in qualche misura anche dall'impulso trasferito, non solo dall'energia.

La figura ci mostra (L è un numero puro) come, normalizzata opportunamente la dimensione del proiettile, per data composizione e struttura superficiale, la curva è univocamente definita e si ha la transizione dal *regime di strength* (linea orizzontale) al *regime di gravità* (linea inclinata). Curve diverse corrispondono a caratteristiche fisico-chimiche differenti, in particolare ad una superficie più o meno dura.

Ovviamente più la roccia è resistente più piccolo risulta il cratere; ma quando il proiettile è grande si entra in regime di gravità e si tende asintoticamente ad una curva valida per tutti i materiali, e decrescente, secondo le conseguenze della (3.3): $d \propto l^{(3/4)}$, ossia

$$\frac{d}{l} \propto l^{(-1/4)} \tag{3.4}$$

La transizione avviene a dimensioni che dipendono da gravità superficiale e velocità d'impatto.

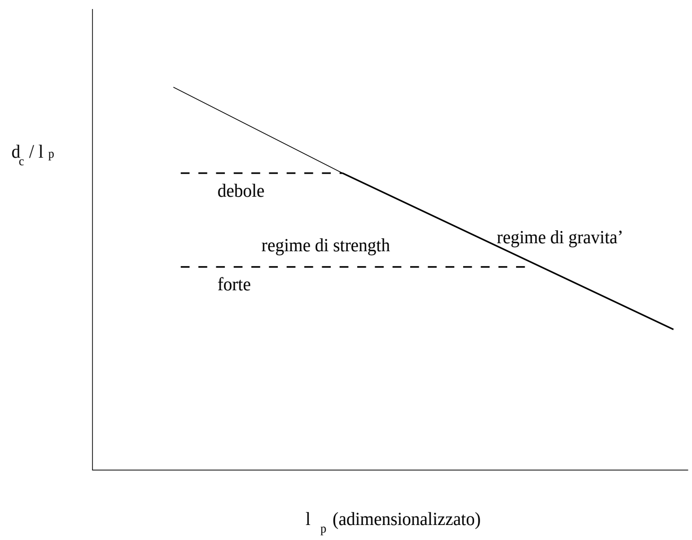

Figura 3.2: andamento di d_c/l_p in funzione di $L = gl_p/v_i^2$.

Lo studio dei fenomeni catastrofici é ancora piú complesso e richiede a maggior ragione l'acquisizione di alcuni strumenti teorici di base, come quelli che discuteremo nei prossimi paragrafi.

3.3 Strumenti teorici di base: la legge di Hooke.

Un corpo soggetto ad uno sforzo si deforma; possiamo definire la deformazione come lo spostamento dei punti che compongono il corpo:

$$\epsilon_i = x_i' - x_i$$

La separazione di due punti infinitamente vicini si trasforma secondo l'espressione $dx_i' = dx_i + d\epsilon_i$ ed un elemento di lunghezza infinitesimo dl diviene:

$$dl'^2 = dx_i' dx_i' = (dx_i + d\epsilon_i)(dx_i + d\epsilon_i) = dx_i dx_i + d\epsilon_i d\epsilon_i + 2d\epsilon_i dx_i$$

Ponendo

$$d\epsilon_i = \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} dx_k$$

si ha finalmente:

$$\begin{aligned} dl'^2 &= dl^2 + 2\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k}\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_l} dx_k dx_l = \\ &= dl^2 + \left(\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x_i}\right) dx_i dx_k + \frac{\partial \epsilon_l}{\partial x_k}\frac{\partial \epsilon_l}{\partial x_i} dx_i dx_k \end{aligned} \tag{3.5}$$

e possiamo quindi definire il tensore delle deformazioni (*strain tensor*):

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \epsilon_l}{\partial x_i}\frac{\partial \epsilon_l}{\partial x_k}\right) \tag{3.6}$$

mediante il quale la (3.5) diviene:

$$dl'^2 = dl^2 + 2\epsilon_{ik} dx_i dx_k \tag{3.7}$$

Il tensore è simmetrico e può quindi essere diagonalizzato mediante una opportuna trasformazione di assi; notiamo che la deformazione (allungamento o accorciamento) relativa lungo la direzione di uno degli assi principali di ϵ può essere espressa come

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2\epsilon^{(i)}} - 1$$

che è $\simeq \epsilon^{(i)}$ al primo ordine; la variazione di volume sarà quindi:

$$dV' \simeq dV(1 + \epsilon_{ii}) = dV[1 + Tr(\epsilon)] \tag{3.8}$$

La traccia del tensore definisce quindi la variazione relativa del volume.

La deformazione di un corpo è in generale dovuta alla presenza di sforzi. Essi potranno essere descritti mediante il *tensore degli sforzi* (o *stress tensor*) legato alle componenti della forza Fi agente su un elemento di volume (densità di forza):

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \tag{3.9}$$

Per una compressione uniforme

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} \tag{3.10}$$

con δ_{ik} simbolo di Kronecker.

L'equazione dell'equilibrio idrostatico ha la forma:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0 \tag{3.11}$$

dove ovviamente ρ è la densità e g_i sono le componenti della accelerazione di gravità.

Notiamo che σ ha le dimensioni di una forza/superficie, ossia di una pressione, o anche di una energia/volume (le stesse del parametro S definito nel paragrafo precedente).

Il lavoro fatto in seguito ad una deformazione può essere così calcolato:

$$\int \delta W dV = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \epsilon_i dV =$$

integrando per parti e notando che l'integrale di superficie si annulla:

$$= \oint \sigma_{ik}\delta\epsilon_i df_k - \int \sigma_{ik}\frac{\partial\delta\epsilon_i}{\partial x_k}dV =$$

$$= \frac{-1}{2}\int \sigma_{ik}\left(\frac{\partial\delta\epsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\delta\epsilon_k}{\partial x_i}\right)dV = -\int \sigma_{ik}\delta\epsilon_{ik}dV \tag{3.12}$$

(notiamo che del tensore di deformazione è stato omesso il termine quadratico, generalmente trascurabile per deformazioni non troppo grandi). La (3.12) permette anche di definire i differenziali di energia ed energia libera relative a trasformazioni termodinamiche di corpi solidi:

$$dE = TdS + \sigma_{ik}d\epsilon_{ik} \tag{3.13}$$

$$dF = -SdT + \sigma_{ik}d\epsilon_{ik} \tag{3.14}$$

ossia:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial E}{\partial\epsilon_{ik}}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial\epsilon_{ik}}\right)_T \tag{3.15}$$

Per deformazioni non troppo grandi rispetto all'equilibrio le funzioni termodinamiche, quale l'energia libera, possono essere sviluppate in serie di ϵ. Il primo termine importante sarà ovviamente quello quadratico (essendo lo sviluppo fatto intorno ad una posizione di equilibrio il termine lineare deve essere nullo). In generale lo sviluppo avrà la forma:

$$F = F_0 + \frac{\lambda_{iklm}}{2}\epsilon_{ik}\epsilon_{lm} \tag{3.16}$$

dove il tensore di rango quattro λ sarà dato dalla struttura cristallina del materiale. Se invece il materiale ha caratteristiche di isotropia, come nei casi che più ci interessano, lo sviluppo in serie di F dovrà comprendere solo delle grandezze scalari costruite con il tensore degli sforzi. Gli unici due scalari indipendenti sono la traccia (ϵ_{ii}) e la norma ($\epsilon_{ik}\epsilon_{ik}$).

Avremo quindi:

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2}\epsilon_{ii}^2 + \mu\epsilon_{ik}\epsilon_{ik} \tag{3.17}$$

dove i due parametri λ e μ prendono il nome di *coefficienti di Lamè.*

Il significato fisico può essere reso più trasparente trasformando il tensore nella somma di due tensori distinti, uno a traccia nulla ed uno diagonale (ricordiamo il legame della traccia con la variazione di volume):

$$\epsilon_{ik} = \left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll} = A_{ik} + B_{ik} \tag{3.18}$$

Nello sviluppo dell'energia libera i prodotti misti si cancellano (essendo nulla la traccia di A), così come il contributo di A al termine con il coefficiente μ: restano solo tre termini:

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} B_{ii}^2 + \mu \left(A_{ik} A_{ik} + B_{ik} B_{ik} \right) \tag{3.19}$$

e definendo:

$$K = \lambda + 2/3\mu$$

e raccogliendo, si ottiene infine:

$$F = F_0 + \mu \left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \epsilon_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} \epsilon_{ll}^2 \tag{3.20}$$

Il coefficiente K prende il nome di modulo di compressione, mentre μ è legato alle deformazioni "di taglio".

Differenziando F, e ricordando che la contrazione di un tensore a traccia nulla sul tensore identità dà ovviamente zero, si ottiene:

$$\begin{aligned}
dF &= K\epsilon_{ll} d\epsilon_{ll} + 2\mu \left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll} \right) d \left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll} \right) = \\
&= K\epsilon_{ll} d\epsilon_{ll} + 2\mu \left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll} \right) d\epsilon_{ik} = \\
&= \left[K\epsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu \left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll} \right) \right] d\epsilon_{ik}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

da cui ricordando la (3.14) è possibile ritrovare il tensore degli sforzi:

$$\sigma_{ik} = K\delta_{ik}\epsilon_{ll} + 2\mu \left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll} \right) \tag{3.22}$$

L'equazione precedente può anche essere facilmente invertita, dando la **legge di Hooke**:

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll} \right) \tag{3.23}$$

che collega la deformazione con lo sforzo applicato. Notiamo che, per esempio, nel caso di compressione uniforme, dalla (3.10) avremo:

$$\epsilon_{ik} = -\frac{P}{3}\delta_{ik} \tag{3.24}$$

Notiamo che in questo caso la traccia di ϵ, che dà la variazione relativa di volume, è uguale a $-P/K$, così giustificando il nome dato a K.

Invece, per esempio, se si ha una compressione unidimensionale, per cui $\sigma_{11} = -P$ e tutte le altre componenti sono nulle, avremo:

$$\epsilon_{11} = -\frac{P}{9K} - \frac{1}{2\mu} \left(-P + \frac{P}{3} \right) = -\frac{P}{9} \left(\frac{1}{K} + \frac{3}{\mu} \right) \tag{3.25}$$

mentre

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{P}{9} \left(\frac{1}{K} - \frac{3}{2\mu} \right) \tag{3.26}$$

e, ovviamente, se i e k sono diversi, $\epsilon_{ik} = 0$.

3.4 Strumenti di base: propagazione delle onde nei solidi.

La propagazione delle onde di pressione nei solidi presenta caratteristiche diverse e più complesse rispetto alla propagazione di onde nei fluidi; si possono avere onde sia longitudinali (nelle quali cioè la direzione di propagazione e quella della perturbazione, compressione o depressione, coincidono) sia trasversali, e le rispettive velocità di propagazione sono diverse. Inoltre le onde si differenziano per intensità, in elastiche, plastiche e d'urto.

Per quanto riguarda le onde elastiche (che non provocano deformazioni permanenti, ed in particolare rottura) le equazioni fondamentali hanno la forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2_{(L,T)} \nabla^2 \phi = 0 \tag{3.27}$$

dove ϕ può essere la pressione, la deformazione ϵ_i o la velocità u_i, e la quantità c è la velocità di propagazione, che per onde longitudinali vale:

$$c_L = \sqrt{\frac{\left(K + 4\frac{\mu}{3}\right)}{\rho}} \tag{3.28}$$

e per onde trasversali assume invece la forma:

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \tag{3.29}$$

Lo stress ha componenti diverse, sia longitudinali, sia trasversali, sia fuori diagonale (*shear stress)*; notiamo che per una onda longitudinale, in cui la deformazione è unidirezionale, si hanno solo componenti di stress sulla diagonale. Longitudinalmente lo stress sarà:

$$\sigma_L = -\rho_0 u_L c_L \tag{3.30}$$

dove u_L è la velocità tipica delle particelle perturbate dall'onda.

Notiamo che la (3.30) può essere qualitativamente capita con il seguente ragionamento: se deriviamo rispetto a x (direzione di propagazione dell'onda) otteniamo a destra

$$-\rho_0 c_L \frac{\partial u_L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x};$$

ma

$$c_L \frac{\partial t}{\partial x} = 1$$

e riarrangiando si ottiene in definitiva $-\rho_0 a$, dove a è l'accelerazione; risulta così verificato che la divergenza di σ coincide con la forza per unità di volume.

Lo stress perpendicolare assume invece il valore:

$$\sigma_P = \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right) \sigma_L \tag{3.31}$$

dove:

$$\nu = \frac{1}{2}\frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}$$

Un'onda trasversale comporta invece uno *shear stress:*

$$\sigma_S = \rho_0 u_T c_T \tag{3.32}$$

In generale le onde longitudinali hanno un ruolo più importante nei processi che stiamo considerando, e dedicheremo loro maggiore attenzione.

Onde di grande intensità danno luogo a fenomeni diversi. È ben noto che i corpi solidi hanno una grande capacità di sopportare compressioni uniformi anche molto grandi, ma sono di converso assai più sensibili a differenze di stress. Se, per un'onda longitudinale, rappresentiamo in ascissa lo stress medio

$$-\frac{1}{3}\left(\sigma_L + 2\sigma_P\right)$$

o anche lo stress massimo σ_L ed in ordinata la differenza di stress $\sigma_L - \sigma_P$, otteniamo evidentemente una semiretta, il cui coefficiente angolare dipenderà dai valori dei parametri K e μ (Fig. 3.3).

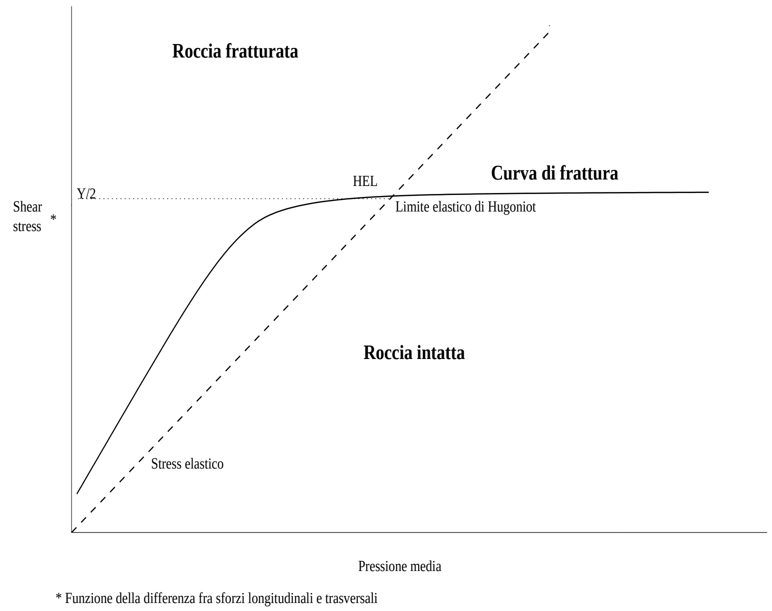

Figura 3.3:

Nello stesso piano possiamo rappresentare la curva limite sotto la quale le deformazioni sono elastiche; la curva sta inizialmente al disopra della semiretta citata, ma tende poi ad un *plateau* e viene così intersecata nel punto "HEL" *(Hugoniot elastic limit)*. Al disopra di questo limite il fenomeno esce dal regime elastico ed entra nel regime "plastico". La differenza di stress limite prende il nome di *yield stress* e viene solitamente indicata con la lettera Y. La condizione per il regime elastico è quindi $|\sigma_L - \sigma_P| < Y$.

Superato il limite di Hugoniot l'onda, che ormai produce deformazioni permanenti, si divide in due, un "precursore elastico" che continua a viaggiare a velocità c_L, ed una onda "plastica" che si propaga ad una velocità minore c_B. Tale velocità varia però con l'intensità dell'onda stessa, ed aumenta progressivamente, fino a superare di nuovo c_L. Si entra allora nel regime delle cosiddette "onde d'urto".

È infine molto interessante discutere il comportamento di un'onda in caso di discontinuità: ciò si applica in primo luogo all'arrivo dell'onda al confine del corpo interessato (nel caso di onde nate da un processo d'impatto, quando l'onda ha attraversato tutto il bersaglio), ma anche ad eventuali fratture o vuoti interni, o a passaggi in zone di diversa struttura fisica o composizione chimica.

Ci sono regole generali che caratterizzano questo tipo di fenomeni, legate a richieste di continuità. In generale un'onda di compressione verrà parzialmente trasmessa e parzialmente riflessa generalmente come onda di rarefazione. In caso di fine del mezzo la riflessione è totale. Questo fatto presenta due interessanti risvolti: il primo concerne il processo generale; se ad una onda di compressione, che certamente danneggia il corpo, segue un'onda di rarefazione, è assai probabile pensare che in questa fase si amplifichino i processi di formazione e separazione dei frammenti. Inoltre, nel momento della riflessione al bordo, vicino al bordo interferiscono due onde, una di compressione uscente, una di rarefazione entrante; ambedue determinano una velocità u_L della materia presente; essendo le due onde opposte in segno ed in propagazione, le due velocità si sommeranno; avremo allora una anomala velocità $2u_L$, corrispondente ad una forte perturbazione. Essa sarà sovente causa di un processo di frammentazione superficiale, che lascerà talora intatta una zona centrale del bersaglio. Il processo in questione prende il nome di *spallazione*.

3.5 Strumenti di base: la strength

Le problematiche sopra discusse ci permettono di introudurre un concetto di rilevante generalità, la **strength**. È sostanzialmente un modo di definire la minima condizione di stress che permette di attivare processi di rottura e simili in un corpo. Anche sulla base di quanto detto in precedenza, la resistenza di un corpo ad un tentativo di spezzarlo dipende dal modo in cui il tentativo viene fatto. Si identifica almeno tre casi qualitativamente diversi: la rottura per **compressione**, per **tensione** e per **impatto**. Come già detto, lo stress viene identificato da una grandezza che ha le dimensioni di una forza per unità di superficie (come la pressione) o, se si preferisce, di una energia per unità di volume. Nel caso di deformazioni "statiche" si definiscono allora la strength compressionale e la strength tensile, come gli stress limite per i quali si ha rottura in caso di compressione o di tensione. La strength da impatto è invece forse meglio intesa come la densità volumica di energia trasmessa al bersaglio con l'impatto.

Le tre quantità sono omogenne e quindi confrontabili, ma differiscono quantitativamente; in generale la strength compressionale ha il valore più alto. Le due altre strength sono in prima istanza correlate con la prima (ossia un corpo è in linea di massima più o meno resistente rispetto alle diverse modalità) ma sono anche influenzate drasticamente dalle caratteristiche di struttura ed in particolare dalla preesistenza di supeficie di frattura, discontinuità, porosità ecc.. per esempio un corpo prefratturato, con le parti riaccostate, ha una strength compressionale e da impatto non troppo diversa da quelle del corpo intatto, ed una strength tensile, ovviamente, vicina a zero. Per strutture complesse condizionate dalla storia precedente (come sono peraltro quelle dei corpi di interesse astrofisico) la tre grandezze sono nettamente differenti, e non chiaramente correlate.

3.5.1 Collisioni catastrofiche.

Gli esperimenti di laboratorio, volti a simulare la rottura per impatto di corpi solidi, suggeriscono un approssimativo *energy scaling* del processo, per cui sostanzialmente il parametro f_1, sopra definito, dipende dal rapporto fra l'energia di impatto e la massa del bersaglio, e quindi la definizione di *impact strength* è effettivamente utile per prevedere gli esiti di un evento collisionale. Vari autori suggeriscono relazioni un po' diverse; una tipica (ottenuta dal gruppo giapponese di A. Fujiwara) ha la forma:

$$f_1 = 0.5 \left(\frac{SM}{\rho E/2} \right)^{1.24} \tag{3.33}$$

dove E è l'energia d'impatto, il fattore 2 a dividerla tiene conto del fatto che di essa tipicamente metà viene devoluta a distruggere il proiettile, e solo metà viene utilizzata sul bersaglio, M è la massa del bersaglio, ρ è la densità dello stesso, ed il parametro S è l'impact strength, e corrisponde, per definizione, alla densità volumica di energia che permette una frammentazione tale che $f_1 = 0.5$. Per rocce di tipo basaltico (o simili, spesso usate per simulare i processi di tipo asteroidale), $S \simeq 10^7\, erg/cm^3$; ciò, per le tipiche velocità di impatto di 5 km/s, implica un rapporto di massa proiettile-bersaglio dell'ordine di 10^{-4}.

Le caratteristiche del frammento superstite più grande non esauriscono evidentemente il problema. I frammenti minori si distribuiscono a varie masse e velocità. La distribuzione di massa è spesso assimilata (grossolanamente) ad una legge di potenza:

$$N(> m) \propto m^{-q} \tag{3.34}$$

dove $N(> m)$ è il numero di oggetti di massa superiore ad m (distribuzione di *massa cumulativa*).

Anche la velocità è tipicamente distribuita secondo una legge di potenza:

$$f(> V) = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-k} \tag{3.35}$$

dove $f(> V)$ è la frazione di massa che sfugge a velocità eccedente V. Le (3.34) e (3.35) assieme suggeriscono anche la presenza di una relazione massa-velocità. La relazione massa-velocità e la (3.35) determinano, per frammenti di scala planetaria, per i quali la forza di autogravitazione recita un ruolo importante, le caratteristiche dell'eventuale processo di riaccumulazione successiva al frazionamento.

Il valore di V_0 (cfr. eq. (3.35)) è collegato alla energia cinetica disponibile per i frammenti osservabili; essa è definita in funzione dell'energia d'impatto mediante il parametro

$$F_{ke} = \frac{E_{cin.\,ejecta}}{E_{impatto}} \tag{3.36}$$

Tale parametro, negli esperimenti di laboratorio, cresce con l'energia specifica di impatto E/M secondo una legge di potenza, da valori intorno a 0.01 per impatti appena catastrofici a valori intorno a 0.1 per impatti totalmente distruttivi (in cui la massa del frammento più grande diventa di pochi millesimi di quella del bersaglio).

I valori di S e F_{ke} sono essenziali nel determinare l'esito di un impatto catastrofico.

Notiamo che, mentre i valori di F_{ke} risultano, almeno a livello di laboratorio, ben definiti, su S esistono grossi margini di incertezza. Essa è tipicamente legata alla resistenza compressionale e tensile dei corpi, ma la costante di proporzionalità cresce nettamente per oggetti porosi o con una struttura interna complessa (prefratturati, agglomerati ecc.); inoltre è stato provata sperimentalmente la dipendenza da una eventuale pressione P cui il corpo sia soggetto (corpi compressi risultano più forti, e questo potrebbe essere di grande importanza per i pianetini, le cui zone centrali sono fortemente compresse dall'autogravitazione); nondimeno la costante di proporzionalità con cui P si somma a S (le due grandezze sono dimensionalmente omogenee) non è del tutto nota. Si noti infine che, anche sulla base di considerazioni teoriche che saranno spiegate prossimamente, sembra ragionevole suggerire che corpi di dimensioni maggiori siano, come valore di base di S, meno resistenti (anche se il sopra citato effetto della compressione gravitazionale può in parte ribaltare la situazione).

3.6 Fenomenologia: riaccumulazione di satelliti e asteroidi,famiglie di asteroidi

Le osservazioni astronomiche, fatte sugli asteroidi, introducono forti vincoli ai valori di S e F_{ke} per oggetti di dimensioni planetarie.

Un primo interessante vincolo viene dalle osservazioni relative alle proprietà rotazionali degli asteroidi. Per tutti gli asteroidi più grandi di circa $250m$ (naturalmente il campione osservativo fino a questa scala è ben lungi dall'essere completo) non si osservano asteroidi che ruotino in meno di $\sim 2h$. Tale risultato è completamente inspiegabile se si pensa ad asteroidi di struttura monolitica, per i quali il periodo di rotazione, in questo range di dimensioni, potrebbe essere molto inferiore (anche dell'ordine di uno o qualche minuto). Diventa invece comprensibile se si pensa ad asteroidi che l'evoluzione collisionale precedente abbia trasformato in **rubble piles** ossia in agglomerati di componenti solide più piccole riaccumulate dalla mutua gravitazione. Se gli asteroidi (o almeno tutti quelli più grandi di $250m$ sono oggetti riaccumulati, il loro periodo di rotazione è inferiormente limitato da quello che causa una fissione o almeno una perdita di materiale dalla zona equatoriale. Si tratta in questo caso di un sistema assimilabile ad un gas di sfere dure, per il quale quindi si possono applicare in parte le considerazioni svolte nel paragrafo 1.6. Il limite di due ore si ottiene per valori di densità abbastanza realistici. L'ipotesi che gli asteroidi siano in generale oggetti riaccumulati richiede che la loro rottura collisionale sia piuttosto facile (bassa impact strength S) e che la frammentazione porti alla formazione di frammenti in moto iniziale con una piccola velocità relativa, tale da consentire una parziale riaccumulazione (bassa S e basso valore anche di F_{ke}).

Diverso è il problema per quanto riguarda gli oggetti di raggio intorno a 100 km (forse il campione più interessante).

i) le *famiglie dinamiche*, ossia gruppi di oggetti con parametri orbitali a, e, i molto simili, e ai quali si attribuisce una origine comune, quali frammenti di un unico processo catastrofico; per giustificarne l'esistenza e le caratteristiche osservative sarebbe utile l'ipotesi sia F_{ke}

sia S assumano valori piuttosto alti; in alternativa sono stati sviluppati recentemente dei modelli coerenti con valori bassi dei suddetti parametri, e basati su una riaccumulazione estesa dei frammenti dovuta alla mutua gravitazione. Non è al momento ancora chiaro se e fino a che punto questi modelli possano riprodurre le osservazioni:

ii) la presenza di un certo numero di asteroidi doppi, la cui origine è probabilmente almeno in alcuni casi collegata con i processi di formazione delle famiglie. I progressi osservativi degli ultimi anni, dovuti sia alle esplorazioni in loco mediante sonde spaziali sia a nuove sofisticate tecniche di indagine remota (radar, speckle interferometry, ecc.) stanno molto migliorando le nostre conoscenze sulla forma degli asteroidi e portando anche alla scoperta relativamente frequente di strutture binarie;

iii) i cosiddetti "LASPA", ossia asteroidi di forma piuttosto allungata (Large Amplitude) e velocemente rotanti (Short Period); alcuni di tali oggetti sono stati interpretati come, approssimativamente, ellissoidi triassiali di Jacobi; ciò implica ragionevolmente un evento collisionale (presumibilmente unico) che abbia

a) trasferito una grossa quantità di momento angolare;

b) fratturato buona parte del corpo, in modo da trasformarlo, in sostanza, in un cumulo di sassi (a parte, magari, un nucleo centrale intatto);

c) lanciato i frammenti a velocità non eccessivamente alta, in modo da consentirne una ricattura (almeno parziale) da parte del frammento più grosso. Un processo di questo tipo limita superiormente $F_{ke} < 2v_e/v_i$, dove v_e è la velocità di fuga del bersaglio, e v_i è la velocità d'impatto. Per oggetti di queste dimensioni questo implica un limite superiore di F_{ke} tipicamente di 0.05, o poco più.

L'insieme di questi vincoli imposti dalle osservazioni crea uno scenario complesso e non ancora completamente risolto.

3.7 Problemi di scaling, strength statica e dinamica, teoria del danno

Le onde, dovute all'impatto, attraversano il corpo e attivano processi di rottura. È essenziale, per capire il fenomeno, valutare la velocità con cui la deformazione viene accumulata.

Nel mezzo sono presenti dei "difetti", a livello quasi microscopico, conseguenza di dislocazioni o di piccole fratture. Sono questi i punti deboli sulla quale la perturbazione agisce, facendoli crescere fino a dar vita a vere e proprie superfici di frattura macroscopiche.

In prima istanza l'effetto della perturbazione si concentra sul punto più debole, ossia sul difetto che viene attivato al più basso livello di deformazione, e ne causa la crescita, fino alla rottura del corpo. Può essere un esempio di questo comportamento quello che succede tendendo una sbarra con sempre maggior forza, fino a spezzarla (generalmente in due parti). Se però la perturbazione cresce troppo rapidamente il difetto "leader" non riuscirà ad assorbirne completamente gli effetti (una frattura non può crescere più velocemente di un certo livello) e saranno allora attivati contemporaneamente altri difetti. Il processo segue allora una diversa evoluzione, che porta poi, abitualmente, alla rottura in più parti.

I due regimi sopra descritti vengono detti di *strength statica* e di *strength dinamica*. La strength (ossia il massimo stress prima della rottura) viene calcolata nei due modelli e risulta corretto, nel caso in questione, quello dei due che dà un valore più alto della strength.

Per capire le condizioni di transizione fra i due regimi, per oggetti di dimensioni diverse, possiamo fare l'ipotesi che i difetti obbediscano ad una *distribuzione di Weibull*, che abbina ragionevoli motivazioni teoriche ad una grande semplicità analitica. Tale distribuzione collega il numero dei difetti alla loro deformazione di attivazione:

$$N(\epsilon) = K\epsilon^m \tag{3.37}$$

dove N è il numero dei difetti attivi ad una deformazione ϵ (si tratta quindi di una distribuzione cumulativa), K è una costante di normalizzazione e m è un parametro tipico del materiale in questione (tipicamente, per materiali basaltici, assume valori dell'ordine di 10).

Ovviamente la costante K sarà proporzionale al volume del corpo:

$$K = K_0 V$$

Se vogliamo ora calcolare, per un dato corpo, la minima deformazione per cui si abbia rottura (il che poi permette di calcolare la strength), dobbiamo porre $N = 1$ nella (3.37): ne consegue una stima di ϵ_{min}:

$$\epsilon_{min} = V^{(-1/m)} = \left(\frac{4}{3}\pi K_0 R^3\right)^{-1/m} \tag{3.38}$$

dove R è il raggio del bersaglio. Ne consegue che al crescere delle dimensioni la deformazione minima necessaria per la rottura, ed il conseguente stress, sono sempre più piccoli.

Ciò non vuole ancora dire che i corpi più grandi sono più fragili; implica semplicemente che per la rottura di corpi grandi, in seguito a collisioni ad alta velocità, siamo sempre in regime di strength dinamica.

La teoria della strength dinamica è troppo complessa per essere trattata qui in dettaglio, anche se nel prossimo paragrafo ne discuteremo alcuni aspetti. Ci limitiamo a dire che la strength tensile prende la forma:

$$\sigma \propto \dot{\epsilon}^{3/m+3} \tag{3.39}$$

dove $\dot{\epsilon}$ prende il nome di *strain rate* e rappresenta appunto la velocità di crescita della deformazione relativa (intuitivamente ha qualche affinità con un gradiente di velocità). Vicino al punto di impatto $\dot{\epsilon}$ può essere stimato dell'ordine di v_p/l, dove v_p è la velocità di impatto e l la dimensione del proiettile.

Possiamo allora, dalla (3.39), dedurre una approssimativa legge di scaling della strength dinamica con le dimensioni del proiettile:

$$\sigma \propto l^{-3/m+3} \simeq l^{-\frac{1}{4}} \tag{3.40}$$

valida se $m \simeq 10$. Notiamo che, in un urto con certe caratteristiche distruttive, il rapporto fra le dimensioni del proiettile e quelle del bersaglio l/R resta quasi immutato al variare della scala; il confronto tra le equazioni (3.38) e (3.40) ci dice che, se per una certa scala la strength è in regime dinamico, resta tale anche per le scale maggiori.

Notiamo che la (3.40) ci conferma definitivamente che i corpi di dimensioni maggiori dovrebbero risultare più fragili all'impatto. Il termine dovuto alla autocompressione gravitazionale potrebbe cambiare le cose, almeno per i corpi planetari abbastanza grandi. Ci sono però altri aspetti, legati al *timing* dei diversi processi fisici all'interno del bersaglio colpito da un impatto energetico. Secondo i risultati delle simulazioni numeriche rivolte allo studio degli impatti tra corpi di grosse dimensioni (quindi di tipo planetario, non bersagli da esperimenti di laboratorio) sembrerebbe inevitabile una estesa fratturazione del bersaglio *precedente* alle ultime fasi dei processi di allocazione dell'energia dell'impatto (legati alla trasmissione delle onde d'urto); in tal caso dovremmo quindi aspettarci che la fase finale del processo, quella in cui si determina per esempio la velocità di espulsione dei frammenti, avvenga in condizioni di strength molto bassa, ed anche di scarsa capacità del mezzo di trasmettere l'energia. Ciò porterebbe in definitiva ad abbinare una estesa frammentazione con una espulsione dei frammenti a bassa velocità: un comportamento che potrebbe essere assimilato a quello tipico di un bersaglio di bassa impact strength. Notiamo anche che, all'interno del bersaglio, $\dot{\epsilon}$ prende valori molto diversi. Ciò causa comunque una frammentazione differenziata in zone diverse, così come d'altro canto si osserva negli esperimenti di laboratorio (molti frammenti piccoli e veloci vicino al punto d'impatto, frammenti più grossi e lenti nella zona opposta, con un frammento più grosso che è spesso un "core").

La teoria del progressivo accumularsi del **danno** in una struttura investita da una perturbazione è uno dei problemi più complessi, ed ha sostanzialmente una base empirica. Il modello attualmente accettato (dovuto a Grady e Kipp) si basa sulle seguenti equazioni:

a) Un mezzo danneggiato può essere caratterizzato da un unico parametro D , compreso fra 0 (materiale intatto) e 1 (distruzione completa). La relazione σ, ϵ prende la forma:

$$\sigma_{ij} = K(1-D)\epsilon_{ll}\delta_{ij} + 2\mu(1-D)\left(\epsilon_i j - \frac{1}{3}\epsilon_{ll}\delta_{ij}\right) \tag{3.41}$$

b) Se n è il numero, per unità di volume, delle microfratture di semilunghezza l, e che quindi interessano un volume

$$V = \frac{4}{3}\pi l^3$$

si ha:

$$D = nV \tag{3.42}$$

c) Il danno si accumula nel tempo, anche perché le fratture crescono con una velocità c_g:

$$D(t) = \int_{-\infty}^{t} \dot{n}(t')V(t-t')dt' \tag{3.43}$$

ed essendo:

$$V(t) \propto \frac{4}{3}\pi c_g^3 t^3$$

si ha:

$$D(t) = \frac{4}{3}\pi c_g^3 \int_{-\infty}^{t} \frac{dN}{d\epsilon}\dot{\epsilon}(1-D)(t-t')^3 dt' \tag{3.44}$$

dove si assume, come $N(\epsilon)$, la distribuzione di Weibull sopra definita.

La teoria del danno, così enunciata, permette di prevedere le caratteristiche dei processi di frammentazione: quando il danno è completo, ad un certo tempo t_f, è per esempio possibile calcolare la distribuzione di dimensioni dei frammenti in funzione dello strain rate:

$$F(L) = \frac{\pi m K_0 L^3}{12 c_g}\left(t_f - \frac{L}{2c_g}\right)^{m-1} \dot{\epsilon}^m \tag{3.45}$$

3.8 Conclusioni: problemi aperti.

Non è per niente facile mettere insieme tutta la fisica di cui abbiamo in precedenza fatto cenno. Il problema più grave nell'elaborazione di modelli numerici adeguati consiste nello spaventoso "range dinamico" intrinseco ad un processo che parte da difetti microscopici per espanderli poi a frammentare oggetti anche molto grandi, e nel quale il livello di concentrazione di energia ed i relativi tempi caratteristici differiscono di diversi ordini di grandezza fra punti e tempi diversi.

In letteratura si trovano numerosi recenti tentativi di trattazione numerica (*hydrocodes*); non possiamo però essere ancora del tutto sicuri della attendibilità dei risultati, così come non possiamo completamente fidarci delle caratteristiche dello "scaling" dalle dimensioni tipiche degli esperimenti di laboratorio (che i modelli numerici riproducono discretamente) a quelle dei processi astronomici. È anche probabile che questi ultimi casi siano resi molto più complessi e in parte imprevedibili dalla articolata evoluzione collisionale precedente all'ultimo impatto. Forse corpi che sono stati precedentemente alterati dalle collisioni reagiscono in modo totalmente differente a collisioni successive. Questo aspetto renderebbe ovviamente anche molto più critica la applicabilità a tali casi di modelli numerici. Molte problematiche asteroidali (comprese quelle relative alla possibile mitigazione delle conseguenze dell'impatto di un Near Earth Object con la Terra) dipendono criticamente da questo problema tuttora del tutto aperto.

Capitolo 4

Modelli cosmologici - AL MOMENTO MANCANTE!

4.1 Le basi osservative della cosmologia moderna

4.2 Distribuzione di massa su grande scala

4.3 Modelli newtoniani di universo. Rilevanza di H e Ω

4.4 Valori empirici di H e di Ω

4.5 Modelli relativistici di universo

4.6 Il modello standard. La radiazione di fondo

4.7 Difficoltà del modello standard: fine tuning, orizzonte

4.8 Teorie inflazionarie; "dark matter" e "dark energy"

4.9 Il tempo di Planck e la Quantum Gravity

Capitolo 5

Formazione di strutture nell'Universo primordiale

5.1 Il criterio di Jeans in cosmologia.

L'applicazione del criterio di Jeans in ambito cosmologico, pur potendo vedersi come particolarmente appropriata, in quanto il teorema di Birkoff permette di superare le limitazioni formali sopra citate, presenta un certo numero di complicazioni.

Ricordiamo la relazione di dispersione (1.54)

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 - 4\pi G\rho_0$$

dove $c_s^2 = \frac{\partial P_1}{\partial \rho_1} = \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{KT}{m}$ è in sostanza la velocità del suono (altrove indicata dalla lettera c).

Ricordiamo che le equazioni di partenza erano le (1.42),(1.43) e (1.44):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho\vec{v}\right) = 0, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P, \tag{5.2}$$

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho. \tag{5.3}$$

Se aggiungiamo alle grandezze imperturbate una perturbazione sufficientemente piccola da consentire una trattazione al primo ordine, ponendo quindi $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $\vec{v} = \vec{v_0} + \delta\vec{v}$, e sostituendo $\vec{\nabla}\delta P$ con $c_s^2\vec{\nabla}\delta\rho$ si ottengono le consuete equazioni linearizzate nelle quali però abbiamo questa volta lasciati i termini contenenti $\vec{v_0}$:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}.\vec{v_0}\right)\delta\rho + \left(\vec{v_0}\cdot\vec{\nabla}\right)\delta\rho + \rho_0\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{v} = 0 \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v_0}\cdot\vec{\nabla}\right)\delta\vec{v} + \left(\delta\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v_0} = \frac{-1}{\rho}c_s^2\vec{\nabla}\delta\rho - \vec{\nabla}\delta\phi, \tag{5.5}$$

e

$$\Delta\delta\phi = 4\pi G\delta\rho. \tag{5.6}$$

Si ponga ora

$$\delta\rho = \rho_0\delta(t)e^{i\vec{k}.\vec{r}} \tag{5.7}$$

Nel caso standard, la (5.4) inserita nella (5.5) di cui si prende la divergenza, permette di arrivare all'equazione

$$\ddot{\delta} + \left(k^2 v_s^2 - 4\pi G\rho_0\right)\delta = 0 \tag{5.8}$$

Se $\delta(t) = \delta_0 e^{i\omega t}$ questo ci riporta alla consueta relazione di dispersione.

L'applicazione del criterio di Jeans in ambito cosmologico pone due problemi essenziali:

1. Non è per lo più corretto definire una pressione, parlare di velocità del suono ecc.; in quanto i tempi collisionali sono molto grandi.

   Per esempio in una galassia le stelle si urtano molto raramente: vedere una galassia ellittica come una "figura di equilibrio rotante" è completamente errato.

   L'impostazione del problema è diversa e più complessa. Comunque il risultato non cambia, se a c_s si sostituisce una velocità quadratica media delle particelle.

2. Il problema più grave è l'espansione dell'universo, che ha luogo con una scala temporale ($\sim 1/\sqrt{G\rho}$) non molto diversa da quella di crescita delle perturbazioni.

   I calcoli devono essere reimpostati, tenendo conto di questo fatto (p. es. $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_0 = 3H$ invece di zero). Che i risultati non possono essere del tutto coincidenti si capisce con un semplice esempio, relativo ad un moto rettilineo uniforme nell'universo in espansione; il corpo si muove, ad un certo istante, con velocità v_* rispetto all'ambiente (rif. "comovente"). Dopo,un intervallo di tempo dt il punto si sarà spostato in un luogo diverso, e il riferimento comovente locale nuovo avrà una velocità, relativa a quello precedente:

   $$dv = [v_*(t)\, dt]\,\frac{\dot{a}}{a} \tag{5.9}$$

   La nuova velocità nel riferimento comovente sarà allora:

   $$v_*(t+dt) = v_*(t) - dv = v_*(t) - \frac{\dot{a}}{a}v_*(t)\, dt \tag{5.10}$$

   ossia

   $$\frac{1}{v_*}\frac{dv_*}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \tag{5.11}$$

   da cui

   $$v_*(t) \propto \frac{1}{a(t)} \tag{5.12}$$

L'espansione dell'universo, di per sé, introduce un rallentamento apparente di un moto rettilineo uniforme. Analogamente si produce un rallentamento nella formazione delle condensazioni.

Ricordiamo che ρ_0 non é costante nel tempo; inoltre $\vec{v_0} = H\vec{x}$ (H é la costante di Hubble), e quindi $\vec{\nabla} \cdot \vec{v_0} = 3H$ mentre l'operatore $\vec{v_0} \cdot \vec{\nabla} = H\left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\right)$.

Le equazioni linearizzate diventano allora:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + 3H\delta\rho + H\left(\vec{x} \cdot \nabla\right)\delta\rho + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v} = 0 \tag{5.13}$$

e

$$\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t} + H\left(\vec{x} \cdot \nabla\right)\delta\vec{v} + H\left(\delta\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{x} = \frac{-c_s^2}{\rho}\vec{\nabla}\delta\rho - \vec{\nabla}\delta\phi \tag{5.14}$$

Se applichiamo a questa ultima equazione l'operatore divergenza, il termine $\vec{\nabla}\left[H\left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\right)\delta\vec{v}\right]$ dà luogo a un termine $H\left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\right)\left.\right)\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v}\left.\right)$ e a termini in cui la derivata parziale rispetto alle coordinate è applicata alle coordinate stesse, dando essenzialmente il delta di Kronecker δ_{ij} e producendo alla fine un termine del tipo di $H\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v}$ da aggiungersi a quello simile ottenuto dal terzo termine. Si ottiene alla fine:

$$\frac{\partial\left(\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v}\right)}{\partial t} + H\left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\right)\left(\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v}\right) + 2H\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v} = \frac{-c_s^2}{\rho}\Delta\delta\rho - 4\pi G\delta\rho \tag{5.15}$$

Per proseguire i calcoli dobbiamo ora passare dalle coordinate "fisiche" $\vec{x}$ a quelle comoventi, fissate una volta per tutte per $a(t) = 1$ e che abbiamo indicato con $\vec{r}$. Questo passaggio altera il calcolo delle derivate rispetto al tempo. Confrontando infatti le espressioni:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}_x f \cdot \vec{v} \tag{5.16}$$

e

$$\frac{df'}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial t} + \vec{\nabla}_r f' \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{5.17}$$

e ricordando la definizione $\vec{x} = a(t)\vec{r}$ si ha infine:

$$\frac{\partial f'}{\partial t}|_r = \frac{\partial f}{\partial t}|_x + H\left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_r\right)f = \frac{\partial f}{\partial t}|_x + H\left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x\right)f \tag{5.18}$$

dove $f = f\left(t, \vec{x}\right) = f\left(t, a\vec{r}\right) = f'\left(t, \vec{r}\right)$. Se poniamo $\delta\rho = \rho\delta(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ l'equazione linearizzata di continuità (5.13), opportunamente riarrangiata, diventa, notando anche che $\frac{\partial log\rho}{\partial t}|_r = -3\frac{\dot{a}}{a} = -3H$:

$$\vec{\nabla}_x \cdot \delta\vec{v} = -\frac{1}{/}\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}|_x + H\left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x\right) + 3H\right]\left[\rho\delta(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right] = \tag{5.19}$$

$$= \delta(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\left[-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial t}|_r + 3H\right)\rho\right] - \left[\frac{\partial}{\partial t}|_x + H\left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x\right)\right]\left[\delta(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right] = \dot{\delta}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{5.20}$$

Inserendo questo risultato nella (5.15) si ottiene:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}|_x + H\left(\vec{x}\cdot\vec{\nabla}_x\right) + 2H\right]\dot{\delta}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = -\left(\frac{c_s^2k^2}{a^2} - 4\pi G\rho\right)\delta e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{5.21}$$

e ricordando la (5.18) si ottiene infine una relazione di dispersione per δ della forma:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + \left(\frac{k^2c_s^2}{a^2} - 4\pi G\rho\right)\delta = 0 \tag{5.22}$$

che differisce dalla (5.8) per il termine in $\dot{\delta}$ e per l'a^2 al denominatore dentro le parentesi. Poichè è sempre possibile scegliere per un certo istante $a = 1$ ciò non cambia la condizione di instabilità, ancora legata al segno del termine dentro parentesi; l'evoluzione successiva di δ ha però un andamento più lento, non esponenziale ma con una potenza del tempo ($\delta \propto t^{2/3}$ in alcuni casi semplici); la condizione di instabilità è invece, come detto, invariata.

La crescita delle perturbazioni nel tempo può essere studiata nell'ambito di un preciso modello cosmologicico. Studiamo un caso particolare, ricordandoci che siamo in un modello newtoniano, in cui però è presente anche un campo di radiazione. Poniamo $\Omega = 1$, per cui: $a(t) \propto t^{2/3}$, e quindi $H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$. Sarà inoltre $8/3\pi G\rho t^2 = 1$ e quindi $\rho = \frac{3}{8\pi G t^2}$.

La relazione di dispersione prende la forma:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} + \left(\frac{c_s^2k^2}{a^2} - \frac{2}{3t^2}\right)\delta = 0 \tag{5.23}$$

Ponendo inoltre:

$$c_s^2 = \frac{\gamma P}{\rho} \propto \rho^{\gamma-1} \propto t^{-2\gamma+2} \tag{5.24}$$

da cui:

$$\frac{c_s^2k^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{t^{2(\gamma-1/3)}} \tag{5.25}$$

dove η è una costante, si ha alla fine:

$$\ddot{\delta} + 4/3\dot{\delta} + \left(\eta^2 t^{-2(\gamma-1/3)} - \frac{2}{3}t^{-2}\right)\delta = 0 \tag{5.26}$$

Nel caso in cui $\gamma = 4/3$ questa equazione ammette come soluzione una funzione $\delta \propto t^q$. Questo è tra l'altro il caso in cui in un universo newtoniano si ha una perturbazione adiabatica dominata dal termine di radiazione). Si ha allora:

$$q(q-1) + 4q/3 + (\eta^2 - 2/3) = 0 \tag{5.27}$$

ossia, riarrangiando:

$$q^2 + q/3 + (\eta^2 - 2/3) = 0 \tag{5.28}$$

L'equazione ammette come radici:

$$q_1 = \frac{-1/3 - \sqrt{1/9 + 8/3 - 4\eta^2}}{2} \tag{5.29}$$

e

$$q_2 = \frac{-1/3 + \sqrt{25/9 - 4\eta^2}}{2} \tag{5.30}$$

Perchè la perturbazione cresca nel tempo deve essere $q > 0$ e questo implica la scelta della soluzione q_2 e che il termine sotto radice sia positivo e non troppo piccolo. Per la precisione deve essere:

$$\eta < \sqrt{2/3} \tag{5.31}$$

La condizione sul segno del termine sotto radice ci riporta in sostanza al criterio di Jeans per l'instabilità:

$$\frac{k^2 c_s^2}{a^2} = k_*^2 c_s^2 << \pi G \rho_* \tag{5.32}$$

dove per $t = t_*$ è $a = 1$.

Se poi $\eta << 1$ $q_2 = 2/3$ e questo dimostra che la perturbazione può crescere ma con un andamento più lento rispetto al classico esponenziale. I calcoli fatti con i modelli relativistici sono ovviamente più complessi, ma la sostanza non cambia.

Diventa invece critico il valore di c_s per valutare la massa caratteristica delle condensazioni, secondo la logica già ampiamente studiate per il criterio di Jeans "normale".

Si hanno sostanzialmente 4 casi interessanti:

- Materia ordinaria + radiazione; perturbazioni *ISOTERME*

  $\Rightarrow$ $\delta_{materia} \neq 0$ ma $\delta_{radiazione} = 0$; infatti $\rho_r \propto T^4$ e se $\delta T = 0 \Rightarrow \rho_r = cost.$

  In questo caso c_s è legata alla materia; facendo i calcoli (notare che $M_J \propto c_s^3$) si ottiene $M_J \sim 10^5 \div 10^6\, M_\odot$ equivalente alla massa di un ammasso globulare;

  $\Rightarrow$ le galassie si formano per coalescenza delle instabilità primordiali;

  $\Rightarrow$ scenario *BOTTOM-UP*.

- Materia + radiazione; perturbazioni *ADIABATICHE*:

  $$\delta_m \neq 0 \Rightarrow \delta_r \neq 0$$

  $$S \propto \frac{T^3}{\rho_m} \propto \frac{\rho_r^{3/4}}{\rho m}$$

  se $S = cost.$ seguirà che

  $$\delta_m = \frac{\delta \rho_m}{\rho_m} = \frac{3}{4}\delta r = \frac{3}{4}\frac{\delta \rho_r}{\rho_r}$$

  In questo caso, essendo ρ_r dominante, nelle fasi in questione, rispetto a ρ_m

$$c_s \sim c_s(r) \sim \frac{c}{\sqrt{3}} \qquad \left[P_r = \frac{1}{3}aT^4 = \frac{1}{3}\rho_r c^2 \; c_s = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{c}{\sqrt{3}} \right]$$

Questo porta alla formazione di masse molto maggiori ($10^{12} \div 10^{14} M_{\odot}$) dalle quali le galassie possono nascere per frammentazione.

$\Rightarrow$ scenario *TOP-DOWN*.

- Dominante materia oscura "calda" (ossia relativistica)

  $\Rightarrow$ stessi risultati del modello "adiabatico".

- Dominante materia oscura "fredda" (non relativistica)

  $\Rightarrow$ come nel modello "isotermo".

I modelli "caldi" e "adiabatico" prevedono fluttuazioni troppe alte del fondo cosmico, e sono oggi in disgrazia; il modello più popolare resta quello con materia oscura fredda, sul quale però, negli ultimi anni, si sono addensate nubi minacciose (dalle misure di *COBE* in poi). Il futuro ci darà una risposta, speriamo.

5.2 Fasi non lineari; problemi aperti

L'evoluzione successiva è ovviamente molto complessa. L'evoluzione non lineare presenta aspetti anche curiosi (quali il passaggio attraverso le strutture dette *pancakes* in cui le asimmetrie iniziali si amplificano). Il problema chiave è però dato dalla difficoltà di riprodurre una situazione complessa ed articolata come la presente ed insieme la modesta deviazione dall'omogeneità a $z = 1000$ imposta dalle misure relative alla radiazione di fondo. Il tutto combinato con la crescita relativamente lenta delle perturbazioni, con legge di potenza e non esponenzialmente come nel caso di Jeans *classico*. Si noti che una analisi anche elementare della relazione di dispersione fa capire come la soluzione possa non essere in generale data da una legge di potenza ma anche come una soluzione di tipo esponenziale sia praticamente esclusa dalla forma della relazione stessa.

L'analisi dei problemi utilizza anche il concetto dello **spettro di potenza** delle perturbazioni, ottenuto mediante la trasformata di Fourier della distribuzione spaziale. Nello scenario BOTTOM–UP, il più popolare negli ultimi anni, anche in connessione con la ipotizzata presenza di materia oscura fredda, i modelli riescono a riprodurre lo spettro di potenza a piccole lunghezze d'onda, ma hanno difficoltà a giustificare la presenza di componenti rilevanti a grande scala. Molti problemi sono tuttora aperti.