SISTEMI PLANETARI

Lezioni del corso tenuto all'Università di Pisa

(Prof. Paolo Paolicchi)

Prefazione

Gli appunti relativi alle lezioni del corso di Sistemi Planetari si articolano in diversi capitoli e paragrafi.

Si noti che alcuni paragrafi (o parti di essi) sono scritte in corsivo. Si tratta di dettagli o di sviluppi formali che possono essere omessi o che si ritiene possano essere già noti agli studenti da corsi precedenti.

PARTE PRIMA: IL SISTEMA SOLARE

Introduzione alla prima parte

In questa prima parte del corso verranno richiamati alcuni argomenti di Meccanica Celeste, con l'approfondimento di aspetti, come la definizione e l'uso dell'invariante di Tisserand, particolarmente utili per lo studio dei corpi minori del Sistema Solare.
Successivamente verrá presentato il Sistema Solare, nelle sue caratteristiche generali e nei dettagli delle varie popolazioni di oggetti (pianeti, satelliti, sistemi di corpi minori).
Verranno discussi i processi evolutivi rilevanti, sia legati alla dinamica delle forze gravitazionali (perturbazioni planetarie, risonanze, ecc.), sia connessi a processi dinamici non gravitazionali (come l'effetto Yarkovsky), sia dovuti alle sempre presenti collisioni. Di questi processi verranno discusse le basi teoriche generali e l'importanza per l'evoluzione del Sistema Solare e dei sistemi planetari in generale.
Infine verranno discusse le basi fisiche e le caratteristiche generali del processo di formazione del Sistema Solare.
Gran parte delle idee discusse e delle nozioni presentate sono contenute nel libro di riferimento [1] e da esso in parte ricavate.

Capitolo 1

Richiami di meccanica celeste: il problema dei due corpi.

1.1 Fondamenti del problema dei due corpi

Il problema dei due corpi è un argomento classico di Fisica I e dei corsi di Meccanica Analitica, e discusso ampiamente nella parte di Meccanica Celeste delle dispense di Astrofisica I [2] o in numerosi libri di riferimento [3,4]. In questa sede richiamiamo solo alcune relazioni e considerazioni fondamentali.
Due corpi di massa m_1 e m_2 sono situati in due punti $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$. Si definiscano inoltre $M = m_1+m_2$ e $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$. La forza di gravità che agisce fra i due corpi sarà:

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r} \tag{1.1}$$

da cui le equazioni del moto dei due corpi:

$$m_1\ddot{\vec{r_1}} = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r} \tag{1.2}$$

$$m_2\ddot{\vec{r_2}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r} \tag{1.3}$$

e quindi:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} \tag{1.4}$$

L'energia totale del sistema sarà:

$$E_t = 1/2m_1\dot{\vec{r_1}}^2 + 1/2m_2\dot{\vec{r_2}}^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} \tag{1.5}$$

Definiamo il vettore centro di massa:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{M} \tag{1.6}$$

essendo $\vec{r_2} = \vec{r} + \vec{r_1}$ e $M\vec{R} = M\vec{r_1} + m_2\vec{r}$ sarà $\vec{r_1} = \vec{R} - (m_2/M)\vec{r}$ e $\vec{r_2} = \vec{R} + (m_1/M)\vec{r}$. Sostituendo, tenendo conto della cancellazione dei termini misti dei due quadrati, e accorpando, si può esprimere l'energia del sistema nella conveniente formulazione:

$$E_t = \frac{M\dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{m_1 m_2 \dot{\vec{r}}^2}{2M} - \frac{G m_1 m_2}{r} \tag{1.7}$$

e, definendo la massa ridotta $\mu = m_1 m_2/M$, si ha l'energia espressa come somma dell'energia di traslazione del centro di massa E_{CM} e dell'energia E di un corpo di massa μ nel campo centrale generato da una massa M:

$$E_t = 1/2M\dot{\vec{R}}^2 + 1/2\mu\dot{\vec{r}}^2 - G\mu M/r = E_{CM} + 1/2\mu\dot{\vec{r}}^2 - G\mu M/r. = E_{CM} + E \tag{1.8}$$

In presenza di un campo centrale il moto avviene nel piano definito dai due vettori (misurati ad un certo tempo) $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$. Il momento angolare, che è perpendicolare al piano dell'orbita, si conserva. La velocità può essere espressa in coordinate polari piane r, θ: si ha $v_r = \dot{r}$ e $v_\theta = \dot{\theta} r$. Nelle stesse coordinate il momento angolare per unità di massa è definito come $h = r^2\dot{\theta}$. La sua costanza implica la costanza della velocità areolare (II legge di Keplero). L'energia E si puó esprimere anche nella forma:

$$E = (1/2)\mu v_r^2 - (1/2)\mu r^2\dot{\theta}^2 - G\mu M/r = \mu[(1/2)v_r^2 + (1/2)h^2/r^2 - GM/r] \tag{1.9}$$

che può essere interpretata come l'energia di un corpo di massa μ in moto unidimensionale (radiale) in un "potenziale efficace" $-GM/r + (1/2)h^2/r^2$.

Le considerazioni fatte possono essere applicate al Sistema Solare tenendo conto che la massa del pianeta piú massiccio (Giove) è di circa un millesimo di quella solare, e che quindi, con buona approssimazione, la massa dei sistemi a due corpi Sole–pianeta può essere approssimata con quella del Sole ($M \simeq M_\odot$). In quest'ottica si può rappresentare ogni pianeta in moto radiale in un unico tipo di potenziale unidimensionale, dipendente da h. Il suo livello di energia per unità di massa potrà corrispondere ad un moto circolare o quasi circolare (energia uguale o di poco superiore al minimo) o ad un moto compreso fra una distanza minima e una massima dal Sole abbastanza o molto diverse. Al limite, il moto diventa limitato solo al bordo interno, come nel caso delle comete in orbite "iperboliche" o paraboliche. Si veda la Fig. 11.1 in [1,cap.11] per una serie di interessanti esempi. Per diversi valori di h si puó calcolare il minimo del potenziale, corripondente all'energia tipica di un'orbita circolare:

$$r = \frac{h^2}{\sqrt{GM}} = \frac{r^4\dot{\theta}^2}{\sqrt{GM}} \tag{1.10}$$

ossia:

$$r^3\dot{\theta}^2 \simeq \sqrt{GM_\odot} \tag{1.11}$$

che dimostra (almeno per il caso di moto circolare) la III legge di Keplero.

1.2 Orbite chiuse

Si può dimostrare che il potenziale $1/r$ tipico della forza di gravità e il potenziale elastico della forma kr^2 sono gli unici che permettano di realizzare orbite chiuse. Si veda [3] per una discussione piú dettagliata di questo aspetto. A scopo euristico, discutiamo il caso di un generico potenziale centrale della forma $-A/r^\alpha$ con α positivo. Con le stesse argomentazioni del paragrafo precedente, possiamo ridurre il problema ad un moto unidimensionale radiale nel potenziale:

$$V' = -A/r^\alpha + (1/2)h^2/r^2 \tag{1.12}$$

Il potenziale ha un punto stazionario quando la sua derivata rispetto a r si annulla:

$$\frac{dV'}{dr} = r^{-3}[-h^2 + \alpha A r^{2-\alpha}] = 0 \tag{1.13}$$

permettendo di calcolare il raggio (dell'orbita circolare):

$$r_0 = (h^2/\alpha A)^{1/(2-\alpha)} \tag{1.14}$$

da cui il corripondente $h_0^2 = \alpha A r_0^{2-\alpha}$.

La condizione dinamica per un'orbita circolare è:

$$\dot{\theta}^2 = \alpha A r_0^{-2-\alpha} \tag{1.15}$$

che si riporta alla legge di Keplero quando $\alpha = 1, A = GM_\odot$. La derivata seconda del potenziale sarà:

$$\frac{d^2V'}{dr^2} = r^{-4}[3h^2 - \alpha(\alpha+1)Ar^{2-\alpha}] \tag{1.16}$$

Per $r = r_0$ si ha:

$$\frac{d^2V'}{dr^2} = r^{-4}[3h^2 - (\alpha+1)h^2] = h^2 r^{-4}(2-\alpha) \tag{1.17}$$

Si vede come per la stabilità delle orbite circolari sia necessaria la condizione $\alpha < 2$. Intorno al minimo si hanno delle oscillazioni caratterizzate da una pulsazione ω:

$$\omega^2 = h^2 r^{-4}(2-\alpha) = (2-\alpha)\alpha A r_0^{-2-\alpha} \tag{1.18}$$

Come si vede la condizione di orbita chiusa ($\dot{\theta} = \omega$) é rispettata solo per $\alpha = 1$.

In realtà c'è anche un altro caso interessante, che è quello relativo ad un moto **armonico** in due dimensioni. In questo caso $\alpha = -2$ e quindi $\omega = 2\theta$. In generale si ha un moto ellttico, ma stavolta **centrato** nell'origine; per ogni rivoluzione si hanno due periodi completi di oscillazione radiale: si passa dalla massima alla minima distanza in un quarto di periodo! Anche in questo caso l'orbita è chiusa.

Tutte le perturbazioni al moto Kepleriano puro (maree, presenza di altre masse generanti un campo aggiuntivo, ecc.), non potendo più il potenziale essere esattamente della forma $1/r$, rendono le orbite aperte. Si vedano a proposito le ref. [2,3].

1.3 Risoluzione del problema dei due corpi: orbite kepleriane.

Dalla equivalenza del moto in un campo centrale con un moto unidimensionale (radiale) in presenza di un potenziale efficace V' (o da una normale derivazione eseguita lavorando in coordinate polari) si ricava naturalmente anche l'equazione del moto:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -GM/r^2 + h^2/r^3 \tag{1.19}$$

Ricordiamo che per l'angolo θ vale l'equazione $\dot{\theta} = h/r^2$ da cui $d\theta = dt\frac{h}{r^2}$ e definiamo la variabile $\chi = 1/r$. Si ha allora $dt = \frac{d\theta}{h\chi^2}$. E' possibile esprimere χ in funzione di θ:

$$\frac{dr}{dt} = -1/\chi^2\frac{d\chi}{dt} = -h\frac{d\chi}{d\theta} \tag{1.20}$$

e quindi:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = h\chi^2\frac{d}{d\theta}(-h\frac{d\chi}{d\theta}) = -(h\chi)^2\frac{d^2\chi}{d\theta^2} \tag{1.21}$$

che permette di trasformare l'equazione del moto in una equazione della traiettoria:

$$\frac{d^2\chi}{d\theta^2} = (h\chi)^{-2}(GM\chi^2 - h^2\chi^3) = GM/h^2 - \chi \tag{1.22}$$

L'equazione é sostanzialmente quella di un oscillatore armonico in presenza di una forza esterna costante, e la sua soluzione sarà:

$$\chi = GM/h^2 + Acos(\theta - \theta_0) \tag{1.23}$$

dove A e θ_0 sono definite dalle condizioni iniziali del moto.
Definendo $e = Ah^2/(GM)$ e ritornando alla variabile r con banali sostituzioni si trova, se e è compresa fra zero e uno, la ben nota equazione di una ellisse uno dei cui fuochi è occupato dalla massa centrale (qui in realtà si tratta della massa fittizia M, e il moto descritto è quello relativo; ovviamente anche rispetto al centro di massa il moto dei due corpi è ellittico):

$$r = \frac{h^2}{GM[1 + e \quad cos(\theta - \theta_0)]}. \tag{1.24}$$

Le distanze massima e minima fra i due corpi possono essere facilmente calcolate:

$$r_{min} = r_p = \frac{h^2}{GM(1+e)}; \quad r_{max} = r_a = \frac{h^2}{GM(1-e)} \tag{1.25}$$

dove i suffissi "p" e "a" stanno rispettivamente per "pericentro, periastro, perielio" o "apocentro, apoastro, afelio". Il semiasse maggiore è ovviamente la media tra r_p e r_a ossia:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{h^2}{GM(1-e^2)} \tag{1.26}$$

che permette anche di scrivere $h^2 = GMa(1-e^2)$. Valgono anche le relazioni $r_p = a(1-e)$, $r_a = a(1+e)$, $b = a\sqrt{1-e^2}$ dove b è il semiasse minore dell'ellisse. Il periodo orbitale T può essere espresso come rapporto fra l'area dell'ellisse e la velocità areolare. Usando le relazioni qui sopra enunciate, si ha:

$$T = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{h} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \tag{1.27}$$

che esprime la III Legge di Keplero anche per il caso generale del moto ellittico. In termini del "moto medio" $n = 2\pi/T$ la terza legge si scrive anche nella forma semplificata $n^2a^3 = GM$.
L'energia totale del sistema, calcolata nel suo centro di massa (E), è costante e può essere calcolata in un punto quasiasi dell'orbita. Per esempio al pericentro la velocità ha, in coordinate polari, componenti: $v_r = 0$ e $v_\theta = h/r_p = GM(1+e)/h$. Si ha quindi:

$$E = 1/2\mu v^2 - GM\mu/r = \frac{\mu[GM(1+e)]^2}{2h^2} - (GM\mu/h^2)GM(1+e) \tag{1.28}$$

ossia

$$E = -(GM/h)^2\mu/2(1-e^2) = -\frac{(GM)^2\mu(1-e^2)}{2GMa(1-e^2)} = \frac{-GM\mu}{2a} \tag{1.29}$$

che esprime la dipendenza dell'energia dal solo semiasse maggiore, e viceversa (ovviamente $a = -GM\mu/(2E)$).
Si deducono anche le relazioni:

$$e^2 = 1 + \frac{2h^2E}{\mu(GM)^2} \tag{1.30}$$

$$h^2 = \frac{-(GM)^2(1-e^2)}{2E/\mu} \tag{1.31}$$

Si definisce "anomalia vera" $f = \theta - \theta_0$ (ovviamente $\dot{f} = \dot{\theta} = h/r^2$). L'equazione della traiettoria si scrive allora nella forma:

$$r = \frac{h^2}{GM(1+e \quad cosf)} \tag{1.32}$$

Le componenti della velocità possono essere espresse in funzione di f:

$$\dot{r} = \frac{h^2e \quad sinf \quad \dot{f}}{GM(1+e \quad cosf)^2} = \frac{GMe \quad sinf}{h} \tag{1.33}$$

(abbiamo sostituito $\dot{f}$ con la sua espressione in funzione di h e r)

$$v_\theta = r\dot{\theta} = h/r = GM(1+e \quad cosf)/h \tag{1.34}$$

Dalla conservazione dell'energia si ha infine:

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = GM(2/r - 1/a) = (GM/h)^2(1+e^2+2e \quad cosf) \tag{1.35}$$

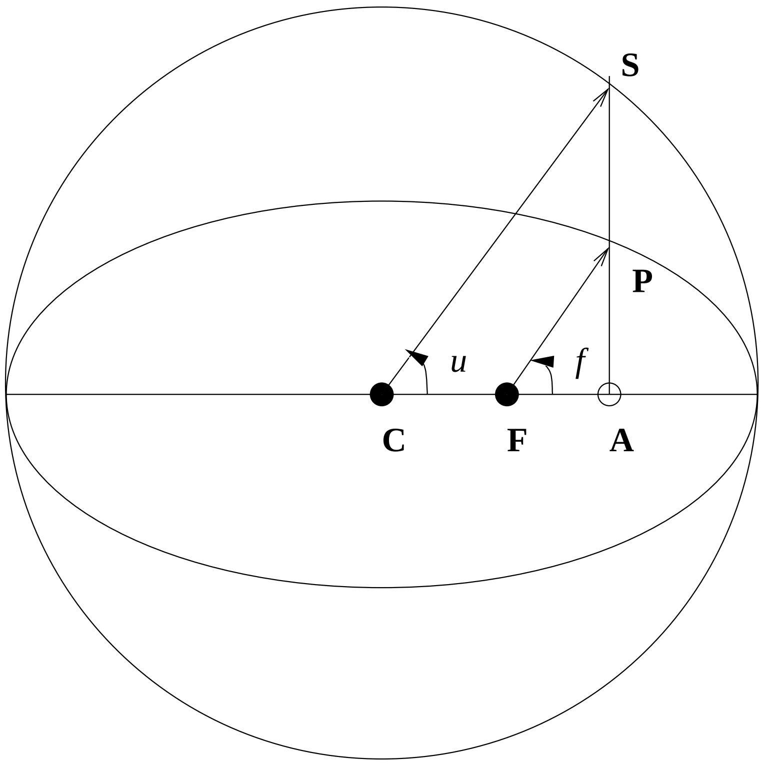

Figura 1.1:

1.4 L'equazione di Keplero.

Passare dall'equazione della traiettoria alla legge oraria del moto non è facile, e non è possibile trovare una soluzione mediante una integrazione analitica. È necessario definire l'"anomalia eccentrica" u. La sua definizione risulta chiaramente dalla Fig. 1.1.

Dalla figura risulta chiaramente che $\mathbf{FA} = \mathbf{CA} - \mathbf{CF}$ ossia $r \quad cos f = a \quad cos u - ae$. Dal confronto tra l'equazione di una ellisse e di una sfera concentriche: $x^2 + (a/b)^2 y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = a^2$ si ottiene immediatamente che $\mathbf{PA} = r \quad sin f = b/a \quad \mathbf{SA} = a\sqrt{1-e^2} \quad sin u$. Sommando i quadrati delle due relazioni e semplificando si ottiene:

$$r = a(1 - e \quad cos u) \tag{1.36}$$

mentre dividendo e riarrangiando si ottiene:

$$tg(f/2) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad tg(u/2). \tag{1.37}$$

Le due equazioni permettono di ricavare r e f dall'anomalia eccentrica. D'altra parte la conservazione del momento angolare (o la costanza della velocità areolare) implicano che $hdt = r^2 df = F(u)du$ dove la funzione $F(u)$ può essere calcolata; integrando e riarrangiando si ottiene infine l'"equazione di Keplero":

$$M = n(t - t_0) = u - e \quad sin u \tag{1.38}$$

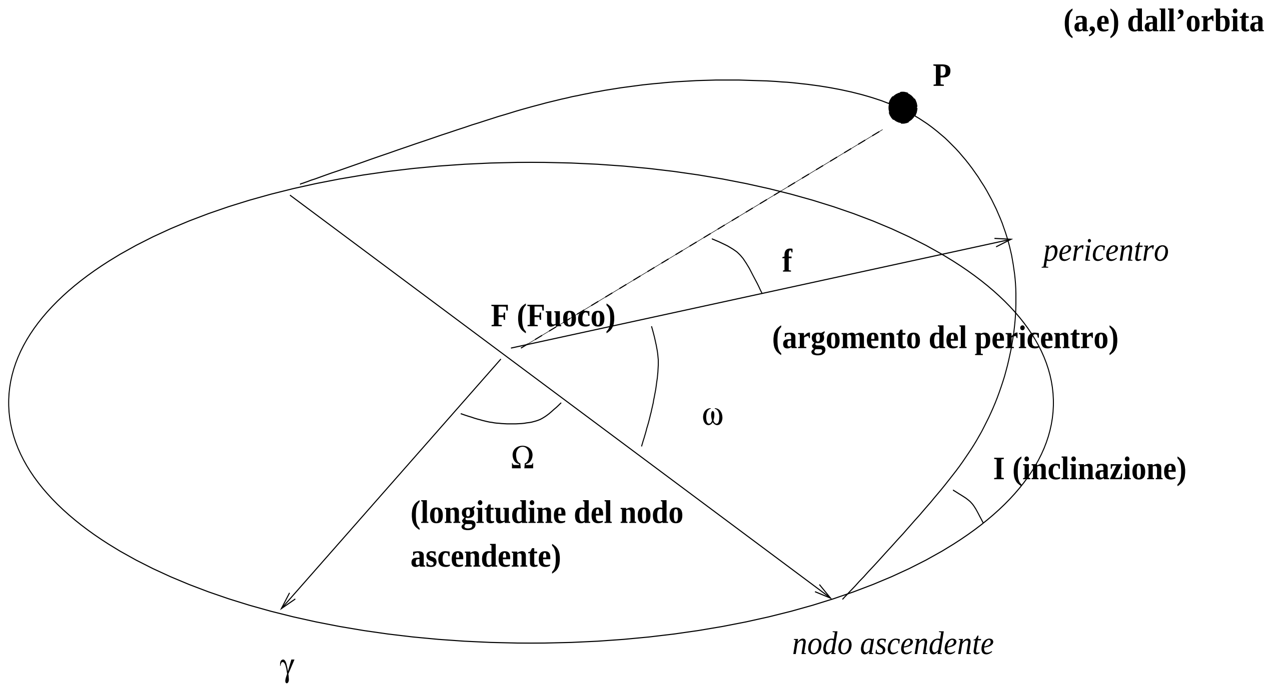

Figura 1.2:

che può essere risolta numericamente, per esempio (per eccentricità non troppo grandi) con un semplice e rapido metodo iterativo.

1.5 Gli elementi orbitali.

Dalle considerazioni dei paragrafi precedenti abbiamo ricavato un metodo per ottenere la legge oraria di un corpo in orbita kepleriana dati a,e e l'anomalia vera ad un certo istante. Alternativamente questo ultimo dato viene spesso sostituito dall'anomalia media al tempo $t = 0$ $(-nt_0)$. Il moto però viene in questo modo descritto in un sistema di coordinate definite dall'orbita stessa (per esempio, se si ragiona in coordinate cartesiane, l'asse delle x è orientato lungo l'asse maggiore, e l'orbita giace sul piano xy). Ai fini di una conoscenza effettiva del moto di un corpo, magari anche per osservarlo al telescopio, è necessario poter trasformare questo sistema di coordinate in un sistema generico, per esempio un sistema in cui il piano $x'y'$ sia quello dell'eclittica, e la direzione delle x' sia definita in modo generale (per esempio prendendo la direzione del punto γ definita dalla posizione del Sole all'equinozio di primavera).

Una trasformazione nello spazio richiede la conoscenza dei tre "angoli di Eulero". Nel caso delle orbite, come si vede dalla figura 1.2, una scelta ragionevole di angoli può essere fatta prendendo:

- Sul piano dell'eclittica, l'angolo formato dalla direzione del punto γ con quella del "nodo ascendente" definita come la direzione della retta di intersezione del piano dell'orbita con quello dell'eclittica ("linea dei nodi"), nel verso in cui l'orbita passa sopra il piano dell'eclittica: questo angolo prende il nome di "longitudine del nodo" ed è indicato con il simbolo Ω.

- Il piano dell'orbita è inclinato su quello dell'eclittica di un angolo I, misurato dall'eclittica all'orbita (si veda nella figura l'angolo rappresentato al nodo ascendente), che prende il nome di "inclinazione".

- L'angolo formato, sul piano dell'orbita, dalla linea dei nodi e dalla direzione del pericentro, che prende il nome di "argomento del pericentro" e viene indicato di solito dal simbolo ω.

Se l'orbita non varia nel tempo, sono costanti nel tempo sia i primi tre elementi orbitali $(a, e, -nt_0)$ sia i tre angoli sopra descritti; insieme abbiamo sei elementi orbitali che la caratterizzano completamente.
Nella realtà, come discuteremo in seguito, le orbite dei pianeti o dei satelliti cambiano nel tempo, ad opera delle perturbazioni degli altri corpi e, in qualche caso, anche di effetti mareali. Fortunatamente, almeno per quanto riguarda il Sistema Solare,le perturbazioni non sono di solito tali da alterare radicalmente il moto durante una singola orbita. Sarà quindi ragionevole definire la cosiddetta "orbita osculante", approssimazione kepleriana limitata ad un periodo di rivoluzione. Le variazioni dell'orbita sono significative su una scala temporale molto superiore ad un periodo orbitale, e si potrà quindi vedere l'evoluzione come variazione temporale degli elementi osculanti. In termini matematici questo si potrebbe fare in modo generale, ma ovviamente gli elementi osculanti consentono una immediata interpretazione solo se le orbite istantanee sono abbastanza simili a delle ellissi. Tipicamente, come vedremo, le perturbazioni sulle orbite planetarie dovute a Giove e agli altri pianeti sono inferiori al rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole ($\simeq 10^{-3}$) e questo fa sì che la scala temporale delle variazioni più rilevanti sia dell'ordine delle migliaia o più periodi orbitali. In pratica l'evoluzione orbitale viene descritta in termini della dipendenza temporale degli elementi osculanti.
Va notato che i vari elementi si comportano in modo diverso. Oltre alla posizione sull'orbita, anche ω e Ω "circolano" ossia variano con continuità da 0 a 2π. Gli altri elementi, invece, oscillano in un range più o meno grande. Questo fa sì che essi siano i soli per i quali il valore attuale può realisticamente fornire informazioni anche relative ad un lontano passato. Semiasse, eccentricità e inclinazione sono gli elementi orbitali più rilevanti per studiare processi evolutivi a lungo termine. Torneremo su questi aspetti nel capitolo 4.