Capitolo 2

Richiami di meccanica celeste: il problema dei tre corpi.

2.1 La costante di Jacobi

Il problema dei tre corpi segna il passaggio dai casi "semplici", ossia quelli in cui le condizioni iniziali permettono di definire degli integrali del moto utilizzabili per la risoluzione del problema a quelli complessi (la quasi totalità) per i quali è di fatto necessaria una integrazione numerica delle equazioni. Per il caso dei tre corpi, con alcune approssimazioni, è possibile ottenere per via analitica una serie di informazioni rilevanti, anche se incomplete.
Siano date tre masse puntiformi, M_1, M_2, M_3, ordinate per massa decrescente. Si parla di "problema ristretto dei tre corpi" quando si può fare l'ipotesi che il moto delle due masse maggiori non sia influenzato in misura significativa dalla massa M_3. Quest'ultima, in sostanza, si comporta come una particella di prova nel campo generato dalle prime due. Il problema ristretto è poi detto "circolare" se l'orbita delle due masse maggiori (l'una intorno all'altra o intorno al comune centro di massa) è con buona approssimazione circolare. In caso contrario il problema si dice "ellittico" e, pur avendo caratteristiche dinamiche abbastanza simili, non consente una trattazione altrettanto semplice, e l'identificazione dell'"integrale di Jacobi" (v. nel seguito). Per la trattazione seguiremo, semplificandola, quella di [1,cap.13].

Il sistema delle due masse maggiori ha un moto orbitale piano, che si può per ipotesi, ma senza riduzione di generalità, collocare nel piano x, y. Le due masse sono distanti a e sulla loro congiungente si colloca il centro di massa **CM**, a distanza $aM_2/(M_1 + M_2)$ da M_1 e a distanza $aM_1/(M_1 + M_2)$ da M_2.
Si possono anche scegliere, per comodità, le unità di misura, fissando $G(M_1 + M_2) = 1$, $G = 1$ e $a = 1$, da cui anche $M_1 + M_2 = 1$ e, dalla relazione $n^2a^3 = G(M_1 + M_2)$ anche $n = 1$ e $T = 2\pi$ (T è il periodo orbitale). Per esempio, nel caso del sistema Sole–Terra, questo vuol dire prendere $M_\odot \simeq 1$, $1y = 2\pi$ e $1U.A. = 1$. È anche possibile definire una variabile temporale adimensionalizzata $\tau = nt$, e ridefinire le due masse come $M_2 = \mu$ e $M_1 = 1 - \mu$.

Si può scegliere come sistema di riferimento il sistema "sinodico" (non inerziale) corotante con le due masse maggiori, fissando l'asse x sulla loro congiungente e ponendo l'origine nel centro di massa. Le coordinate delle due masse (ferme in questo sistema) saranno quindi:

$$\vec{x}_{M_1} = (-\mu, 0, 0)\ \vec{x}_{M_2} = (1-\mu, 0, 0) \tag{2.1}$$

È semplice calcolare, nel sistema sinodico, le componenti cartesiane dell'accelerazione di M_3. La massa è soggetta all'accelerazione di gravità dovuta alle altre due masse ed inoltre alla accelerazione di trascinamento "centrifuga" e all'accelerazione di Coriolis. Con le scelte di unità di misura fatte, e definendo la derivata rispetto a τ con il simbolo $\dot{x}$, si ha:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} \tag{2.2}$$

dove:

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2} \tag{2.3}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.4}$$

Per le altre componenti si ha:

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \tag{2.5}$$

$$\ddot{z} = [\frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}]z. \tag{2.6}$$

Si noti che lungo l'asse z non agiscono nè l'accelerazione di trascinamento nè quella di Coriolis.
È anche possibile definire (nel sistema di riferimento scelto) un "potenziale efficace":

$$W(x,y,z) = -\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \tag{2.7}$$

mediante il quale le equazioni precedenti possono essere scritte nella forma compatta:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = -\frac{\partial W}{\partial x} \tag{2.8}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial W}{\partial y} \tag{2.9}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial W}{\partial z}. \tag{2.10}$$

Moltiplicando le tre equazioni rispettivamente per $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ e sommando e semplificando si ha:

$$\frac{d}{dt}[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2] = -\frac{dW}{dt}. \tag{2.11}$$

Integrando rispetto al tempo si ottiene la "costante di Jacobi" (o l'integrale di Jacobi):

$$J = 1/2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + W = costante \tag{2.12}$$

che, unico integrale primo del problema, ha un ruolo simile ad una energia, *ma non è l'energia*. Se in un punto (x_0, y_0, z_0), $W(x_0, y_0, z_0) = J$, avremo ovviamente $\vec{v} = 0$. I luoghi dei punti siffatti prendono il nome di "superfici di Hill" (o di curve di Hill nel caso di moto limitato al piano x, y).
Si noti che l'integrale di Jacobi non è definito nel problema ellittico, anche se, per eccentricità piccole, la dinamica del sistema non è qualitativamente diversa.

2.2 Punti lagrangiani: L_4 e L_5

La ricerca dei punti di equilibrio del problema ristretto può essere condotta analizzando le equazioni del moto nelle tre diverse componenti. Dall'equazione (2.6) si deduce immediatamente che condizione necessaria per l'equilibrio è $z = 0$. Gli eventuali punti di equilibrio saranno tutti sul piano x, y. L'equazione (2.6) permette anche di dedurre che un corpo spostato dal piano x, y sarà soggetto ad una forza di richiamo. In prima istanza, per $z << 1$ (ossia piccolo rispetto ad a) un corpo sarà soggetto ad una forza di richiamo di tipo elastico (ciò ovviamente è significativo solo se il moto è solo lungo l'asse z) e quindi tenderà ad oscillare intorno al "piano principale" o di simmetria del sistema.

Per trovare i punti di equilibrio possiamo limitarci a considerare il moto e le posizioni sul piano x, y. Per un punto di equilibrio deve ovviamente essere $\dot{x} = \dot{y} = 0$ e quindi il problema si riduce a trovare i punti stazionari di W. Le (2.8–2.9) possono essere riscritte in forma più sintetica e la condizione di equilibrio diventa:

$$-\vec{\nabla} W = \vec{r} - (1-\mu)\vec{r_1}/r_1^3 - \mu\vec{r_2}/r_2^3 = 0 \tag{2.13}$$

ma essendo $\vec{r} = (1-\mu)\vec{r_1} + \mu\vec{r_2}$ si ha riarrangiando:

$$\vec{r_1}(1-\mu)(1-1/r_1^3) + \vec{r_2}\mu(1-1/r_2^3) = 0. \tag{2.14}$$

L'equazione (2.14) può essere verificata, se r_1 e r_2 sono paralleli (e quindi sono ambedue sull'asse delle x), da una opportuna combinazione di valori dei coefficienti; se invece r_1 e r_2 non sono paralleli, solo dall'azzerarsi di ambedue i coefficienti. Ciò implica direttamente $r_1 = r_2 = 1$. La condizione definisce i due punti di equilibrio L_4 ed L_5 (L sta per "lagrangiano") che formano due triangoli equilateri aventi come base comune il segmento che unisce le due masse maggiori (fig. 2.1). Se la cosa viene vista in un sistema centrato sul corpo maggiore (come nel caso di un sistema eliocentrico se l'altro corpo massiccio è un pianeta) i due punti sono sull'orbita del pianeta e precedono o seguono lo stesso di 60°. La discussione della stabilità di questi due punti è complessa e rimandiamo a [1,2]. In questa sede ci limitiamo a dire che:

- I due punti identificano un **massimo** di W.
- La forza di Coriolis, se il corpo inizialmente in L_4 o L_5 viene messo in moto con piccola velocità, introduce un termine di richiamo.
- Se $\mu < \mu_c \simeq 0.04$ l'effetto della forza di Coriolis domina ed i punti diventano di equilibrio stabile.

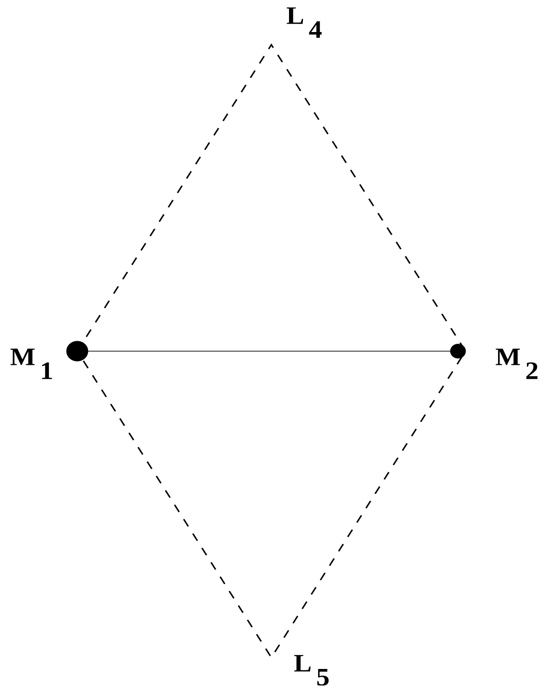

Figura 2.1: I due punti lagrangiani “equilateri”

- Un corpo collocato nei o vicino ai punti suddetti resta confinato e compie delle oscillazioni; le oscillazioni diventano più ampie nei casi realistici in cui le orbite non sono esattamente circolari e si tengono in conto le perturbazioni degli altri pianeti.
- Corpi così collocati, detti “Troiani” sono stati trovati nei punti lagrangiani dei sistemi Sole-pianeta; in particolare i Troiani di Giove costituiscono un campione rilevante e numeroso di oggetti.

.

2.3 Gli altri punti lagrangiani e le superfici di Hill

La ricerca degli altri punti di equilibrio è, come si è detto, ristretta all'asse x. Si devono trovare i punti stazionari della funzione:

$$W(x) = -x^2/2 - \frac{1-\mu}{x+\mu} - \frac{\mu}{x-1+\mu} \tag{2.15}$$

Facendo la derivata rispetto a x il problema si riduce a cercare (per via non analitica) le soluzioni di una equazione di quinto grado. Anche senza risolverla esplicitamente, è possibile, con uno studio della funzione, identificare la collocazione dei punti stazionari. Infatti la W tende a $-\infty$ all'infinito (negativo e positivo) e nelle posizioni delle due masse. Essendo gli zeri reali di una equazione di grado quinto 1 o 3 o 5, quanto detto è compatibile con una funzione con tre punti stazionari lungo l'asse x, che chiameremo L_1, L_2, L_3 (si veda la figura 2.2). I tre punti sono di massimo e in questo caso sono assolutamente di equilibrio instabile.

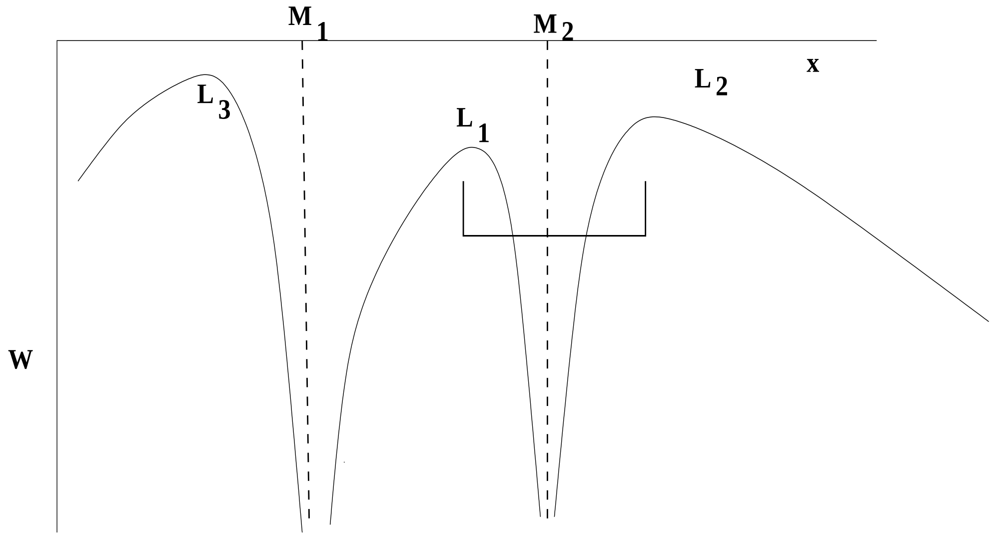

Figura 2.2:

Non è facile trovare esattamente la posizione dei tre punti lagrangiani, ma uno sviluppo in serie in funzione di μ (numero abbastanza piccolo, per esempio, nei casi di interesse nel Sistema Solare) dà come risultati approssimati:

$$x(L_3) \simeq -1 - \frac{5\mu}{12} \tag{2.16}$$

$$x(L_1) \simeq 1 - \mu - (\mu/3)^{1/3} \tag{2.17}$$

$$x(L_2) \simeq 1 - \mu + (\mu/3)^{1/3} \tag{2.18}$$

La zona compresa tra L_1 e L_2 è dinamicamente dominata dalla massa M_2. I due punti sono approssimativamente simmetricamente collocati rispetto alla stessa, e permettono di definire il "raggio di Roche" (o "di Hill"):

$$r_{Roche} = a(\frac{M_2}{3M_1})^{1/3} \tag{2.19}$$

Sul piano x, y la regione dominata da M_2 è più o meno definita da un cerchio di raggio r_{Roche}.

La situazione nel piano puó essere meglio compresa guardando la figura 2.3, che rappresenta (qualitativamente) per diversi valori della costante di Jacobi J, le curve di Hill (siamo in una rappresentazione piana) e, conseguentemente, le regioni permesse o proibite al moto. Si vede che per bassi valori di J il corpo è confinato in regioni ristrette intorno alle due masse o a grande distanza da tutte e due. Per valori maggiori le regioni si estendono e le due regioni intorno alle masse principali possono unirsi. In questo caso diventano possibili trasferimenti di corpi da orbite legate ad uno dei due all'altro, trasferimenti di massa (per esempio nel caso di sistemi binari stretti in cui una delle due stelle occupa tutto il lobo di propria competenza la materia può defluire da questa all'altra) ecc.. Per J ancora crescente diventano sempre più ristrette le zone proibite, che finiscono poi per scomparire del tutto.

2.4 L'invariante di Tisserand

L'esistenza della costante di Jacobi permette l'elaborazione di un interessante criterio per studiare la possibilità di incontri ravvicinati di un corpo (tipicamente minore, come una cometa) con un pianeta, e per riconoscere l'oroigine dinamica comune a oggetti su orbite apparentemente molto diverse. Studieremo in particolare il caso di un sistema a tre corpi Sole,Giove (G),cometa (c), ma le considerazioni che faremo saranno del tutto generalizzabili.

La costante di Jacobi viene definita a partire dal sistema sinodico, ma può essere espressa in un sistema di coordinate inerziali eliocentriche x_0, y_0, z_0. Le leggi di trasformazione dal sistema sinodico in cui sono definite le coordinate x, y, z al sistema inerziale sono, se all'istante iniziale si orientano gli assi in modo da avere: $x = x_0, y = y_0, z = z_0$:

$$\dot{x} = \dot{x_0} + ny_0 \tag{2.20}$$

$$\dot{y} = \dot{y_0} - nx_0 \tag{2.21}$$

e quindi:

$$\dot{x^2} + \dot{y^2} = \dot{x_0^2} + \dot{y_0^2} - 2n(x_0\dot{y_0} - y_0\dot{x_0}) + n^2(x_0^2 + y_0^2) = \dot{x_0^2} + \dot{y_0^2} - 2n(x_0\dot{y_0} - y_0\dot{x_0}) + n^2(x^2 + y^2) \tag{2.22}$$

mentre ovviamente:

$$\dot{z^2} = \dot{z_0^2}. \tag{2.23}$$

La costante di Jacobi prende la forma:

$$J = \frac{(\dot{x_0^2} + \dot{y_0^2} + \dot{z_0^2})}{2} - n(x_0\dot{y_0} - y_0\dot{x_0}) - GM_1/r_1 - GM_2/r^2 \tag{2.24}$$

Introduciamo ora alcune approssimazioni. $M_G << M_\odot$, per cui la posizione del Sole coincide praticamente con quella del centro di massa. Lontano da eventuali incontri ravvicinati con Giove il moto della cometa può essere approssimato con un moto kepleriano eliocentrico, per il quale possiamo usare le relazioni ottenute nel Cap.1. Per esempio:

$$\frac{(\dot{x_0^2} + \dot{y_0^2} + \dot{z_0^2})}{2} = GM_\odot[1/r_1 - 1/(2a_c)] \tag{2.25}$$

mentre il momento angolare sul piano dell'orbita di Giove, inclinato di un angolo I rispetto al piano orbitale della cometa, può essere espresso nella forma:

$$x_0\dot{y_0} - y_0\dot{x_0} = \sqrt{GM_\odot \quad a_c(1 - e_c^2)} \quad cosI. \tag{2.26}$$

Per il moto di Giove possiamo usare la terza legge di Keplero:

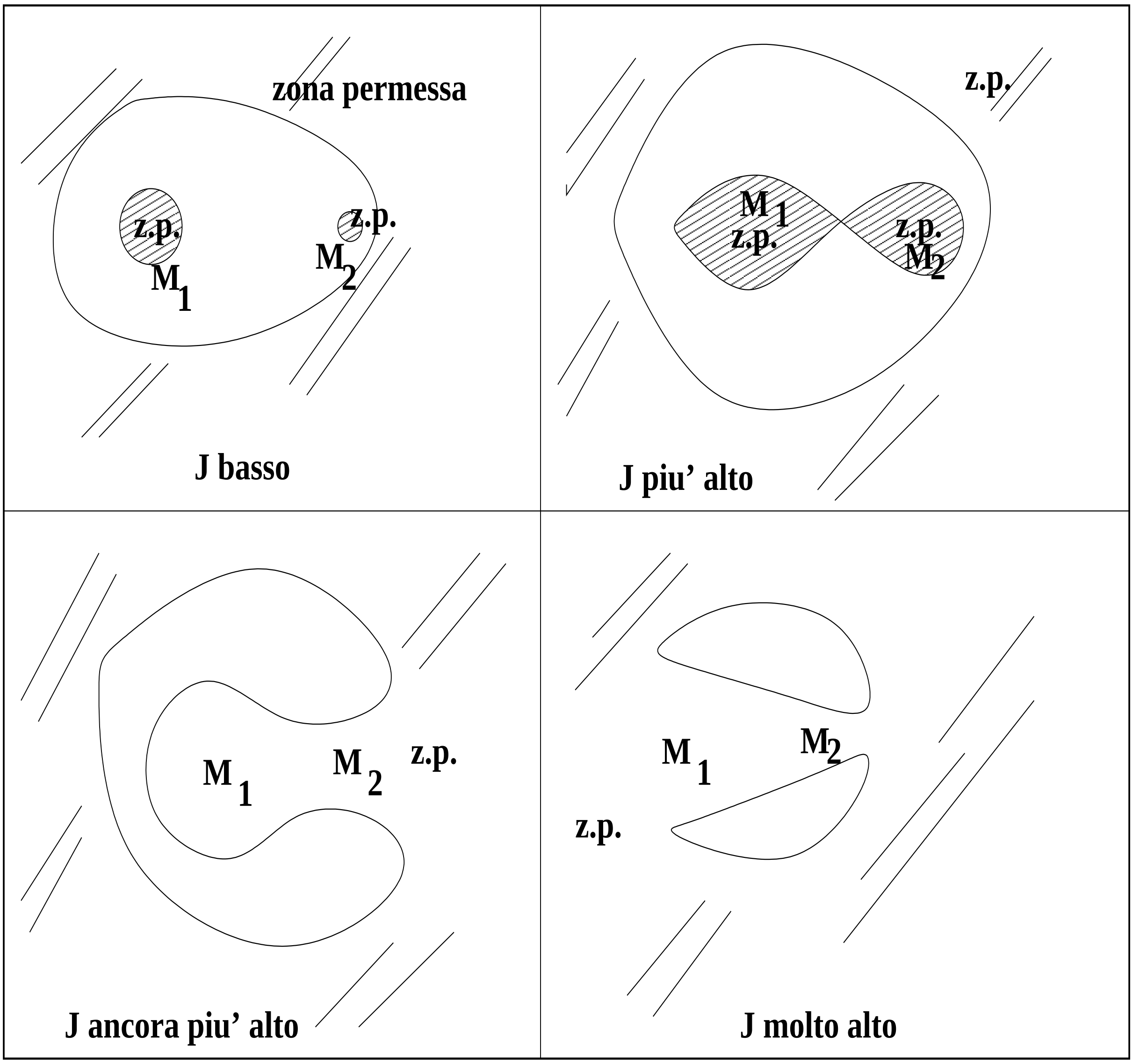

Figura 2.3: Zone permesse e proibite per vari valori di J

$$n^2 a_G^3 = GM_\odot \tag{2.27}$$

da cui:

$$J = GM_\odot \quad [1/r_1 - 1/(2a_c)] - \sqrt{GM_\odot/a_G^3}\sqrt{GM_\odot \quad a_c(1-e_c^2)}cosI - GM_\odot/r_1 - GM_G/r_2 \tag{2.28}$$

Semplificando i termini $1/r_1$ e moltiplicando per $\frac{2a_G}{GM_\odot}$ si ha:

$$\frac{2Ja_G}{GM_\odot} = a_G/a_c - \sqrt{\frac{a_c(1-e_c^2)}{a_G}}2cosI - \frac{2a_G M_G}{M_\odot r_2}. \tag{2.29}$$

Lontano da un incontro ravvicinato con Giove l'ultimo termine $\propto M_G/M_\odot << 1$, diversamente dai precedenti; si può quindi considerare approssimativamente costante la quantità:

$$T = a_G/a_c + 2cosI\sqrt{\frac{a_c(1-e_c^2)}{a_G}} \tag{2.30}$$

In presenza di un incontro ravvicinato T potrà cambiare (diminuire) sensibilmente ma tornerà successivamente ai valori precedenti. Il comune valore di T può servire a identificare come dinamicamente legate due orbite (quella precedente e quella seguente a un incontro ravvicinato) apparentemente molto diverse fra di loro.

Si ha un altro interessante risultato se si calcola la velocità relativa alla quale un eventuale incontro ravvicinato con Giove può avere luogo. Per la cometa, quando $r \simeq a_G$ (ma ancora lontani dall'incontro con Giove), dalla (1.34) si ricava:

$$v_\theta = h/a_G = \sqrt{GM_\odot/a_G}\sqrt{\frac{a_c(1-e_c^2)}{a_G}}. \tag{2.31}$$

La velocità v_θ è trasversale sul piano dell'orbita cometaria. Rispetto all'orbita di Giove, inclinata di un angolo I, avrà due componenti, una parallela al moto trasverso di Giove, ed uguale a $v_\theta cosI$, e l'altra perpendicolare ed uguale a $v_\theta sinI$.
La velocità radiale della cometa v_r sarà invece data, in base alla (1.35) per cui $v^2/2 = GM_\odot[1/a_G - 1/(2a_c)]$, dalla espressione:

$$v_r^2 = v^2 - v_\theta^2 = 2GM_\odot/a_G - GM_\odot/a_c - GM_\odot\frac{a_c(1-e_c^2)}{a_G^2} \tag{2.32}$$

Sarà quindi:

$$v_r = \sqrt{GM_\odot/a_G}\sqrt{2 - a_G/a_c - \frac{a_c(1-e_c^2)}{a_G}}. \tag{2.33}$$

In approssimazione di orbita circolare per Giove avremo:

$$v_r^G = 0; \; v_\theta^G = \sqrt{GM_\odot/a_G} \tag{2.34}$$

Non lontano dall'incontro la velocità relativa la quadrato potrà essere calcolata combinando le espressioni precedenti:

$$v_{rel}^2 = GM_\odot/a_G[2 - a_G/a_c - \frac{a_c(1-e_c^2)}{a_G}] + \frac{GM_\odot sin^2 I}{a_G}\frac{a_c(1-e_c^2)}{a_G} + \frac{GM_\odot}{a_G}[\frac{a_c(1-e_c^2)cosI}{a_G} - 1]^2 \tag{2.35}$$

ossia:

$$v_{rel}^2 = GM_\odot/a_G[3 - a_G/a_c - 2cosI\sqrt{(1-e_c^2)\frac{a_c}{a_G}}] = \frac{GM_\odot(3-T)}{a_G} \tag{2.36}$$

Solo per $T \leq 3$ è possibile un incontro ravvicinato con Giove. Questo permette di dividere le orbite cometarie tra quelle che possono essere state alterate da un incontro ravvicinato con Giove (comete della famiglia di Giove) e le altre. Si vedano maggiori dettagli nel Cap.3.

Il criterio di Tisserand può essere ovviamente applicato anche a sistemi diversi, e costitusce un metodo potente di classificazione. Ovviamente un corpo che subisce incontri ravvicinati con diversi pianeti non sarà più ricondicibile a questo tipo di analisi. Se T calcolato rispetto al pianeta A torna al valore precedente dopo un incontro ravvicinato con A, lo stesso non è vero se l'incontro ravvicinato è con il pianeta B. Fortunatamente in molti casi l'evoluzione dinamica di un corpo è quasi completamente dominata dall'interazione dai possibili incontri ravvicinati con un solo pianeta. In questo caso il criterio di Tisserand permette delle efficaci classificazioni dinamiche.