Chapter 4

Evoluzione dinamica del Sistema Solare

4.1 Teoria delle perturbazioni: equazioni di Gauss

In generale lo studio dell'evoluzione dinamica del Sistema Solare sfrutta il fatto che la massa del Sole è di gran lunga più grande di quella di ogni altro corpo del Sistema. Almeno finchè si ragiona in termini delle forze legate alla gravitazione, l'effetto del Sole è quasi sempre di gran lunga prevalente, e l'effetto degli altri corpi si può trattare con una tecnica di tipo perturbativo, vale a dire considerando le correzioni al moto orbitale kepleriano. Come già detto questo consiste in sostanza nello studiare la variazione nel tempo degli elementi orbitali osculanti. In altri termini l'evoluzione dinamica di un sistema a molti corpi può essere seguita non solo integrando direttamente le equazioni del moto reale, ma anche analizzando il "moto" fittizio nello spazio astratto le cui coordinate sono gli elementi orbitali. Sono pertanto di grande importanza i metodi che permettono di calcolare questo secondo tipo di moto partendo dalle forze reali in gioco. Naturalmente l'uso di una tecnica perturbativa richiede una corretta valutazione della importanza relativa dei vari effetti. Se di solito l'effetto del Sole è dominante, ed è corretto trattare l'effetto degli altri corpi come una perturbazione, ci sono dei casi, come nei sistemi pianeta–satellite o nei passaggi planetari molto ravvicinati, in cui la dinamica è prioritariamente determinata dall'effetto del corpo più vicino, non del più massiccio. Varie definizioni sono presenti in letteratura ("zona di influenza", "lobo di Hill" ecc.) per marcare le regioni in cui questa inversione può aver luogo. Ovviamente più siamo vicino ad un caso di transizione fra differenti regimi più la trattazione perturbativa diventa difficile e richiede molte precauzioni.

Il metodo più semplice per trattare l'effetto delle perturbazioni è dato dalle *equazioni di Gauss.*

Si consideri il moto orbitale di un corpo, ad un certo istante collocato nel punto $\vec{P}$. Su di esso agirà al momento una forza data dalla risultante della ordinaria forza di attrazione solare e da una componente perturbativa $\vec{F}$. È opportuno rappresentare la perturbazione usando una terna di assi cartesiani definiti dai versori $\mathbf{r}$ (lungo la direzione radiale), $\mathbf{w}$ (lungo la direzione del momento angolare, perpendicolare al piano dell'orbita, detta anche "normale"), e $\mathbf{t}$ (perpendicolare alle prime due, detta "binormale" o anche trasversale). Le tre componenti, calcolate per massa unitaria del corpo perturbato, saranno da qui in poi indicate con le lettere R, W, T.

Per calcolare l'effetto della perturbazione si può, per esempio, cominciare con calcolare la variazione dell'energia totale per unità di massa E. Si ha:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Rv_r + Tv_\theta \tag{4.1}$$

Ricordando le eq. (1.33,1.34) è possibile scrivere:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{GM}{h}[Resinf + T(1 + ecosf)] \tag{4.2}$$

dove h è il momento angolare per unità di massa del pianeta, M la massa del sistema (ossia, in pratica, quella del Sole) e f è l'anomalia vera dell'orbita osculante.
Ricordando la relazione (1.29) tra energia e semiasse maggiore dell'orbita osculante, si ha:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{GM}\frac{dE}{dt} = \frac{2a^2}{h}[Resinf + T(1 + ecosf)] \tag{4.3}$$

Ricordando l'espressione di

$$h = \sqrt{GMa(1 - e^2)} \tag{4.4}$$

e la III Legge di Keplero $n^2a^3 = GM$ (dove n è il moto medio) l'espressione diviene:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1 - e^2}}[Resinf + T(1 + ecosf)] \tag{4.5}$$

Al limite di basse eccentricità l'espressione si può semplificare, ponendo $e = 0$, nella forma:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2T}{n} \tag{4.6}$$

Questa espressione è molto significativa: nel moto circolare l'unico modo per cambiare il semiasse maggiore è di imprimere una accelerazione **lungo l'orbita**. Ciò è d'altra parte conseguenza immediata della Eq. 4.2 e del fatto che semiasse maggiore ed energia dipendono esclusivamente l'uno dall'altra. Il fatto ha ovvie implicazioni in merito alle strategie di dinamica spaziale. Meno direttamente può anche essere visto come un primo indizio di stabilità del semiasse maggiore dei pianeti nel tempo. Infatti se si analizza qualitativamente l'effetto di un pianeta su di un altro (Fig.4.1) si vede che, al limite di orbite circolari e complanari, semplici ragioni di simmetria suggeriscono che l'accelerazione lungo l'orbita abbia durante un periodo sinodico componenti positive e negative che si compensano. Sembra quindi lecito aspettarsi, in linea di massima, che le perturbazioni siano "di breve periodo" (un periodo paragonabile al periodo sinodico) e non abbiano termini "secolari" (si veda il seguito del capitolo per una discussione più approfondita). Il semiasse maggiore dovrebbe quindi essere soggetto soltanto a oscillazioni di breve periodo. La realtà è molto più complessa, le orbite non sono circolari nè complanari; di conseguenza i semiassi maggiori dei pianeti oscillano nel tempo in misura significativa. Ciò nonostante la generale stabilità del Sistema Solare sembra poter restare una valida ipotesi.

La variazione dell'eccentricità può essere calcolata con un argomento simile al precedente. Il modulo del momento angolare per unità di massa h varia solo per l'effetto della forza perturbativa e dipende, in realtà, solo dalla sua componente binormale:

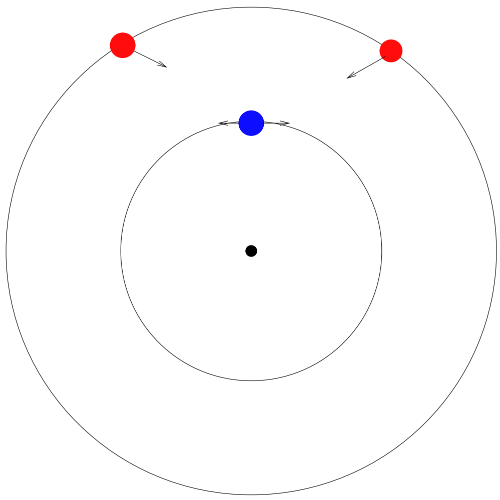

Figure 4.1: Simmetria della forza perturbativa in relazione alla fase relativa tra i due pianeti.

$$\frac{dh}{dt} = rT \tag{4.7}$$

dove r è, ovviamente, la distanza dal Sole. Ricordando l'espressione di h (4.4) si ha anche:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial h}{\partial e}\frac{de}{dt} = \frac{GM}{2h}[(1-e^2)\frac{da}{dt} - 2ea\frac{de}{dt}] \tag{4.8}$$

da cui:

$$\frac{2eaGM}{2h}\frac{de}{dt} = \frac{GM(1-e^2)}{2h}\frac{da}{dt} - rT \tag{4.9}$$

Ora, essendo:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+ecosf} \tag{4.10}$$

si ha, semplificando:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{2ea}\frac{da}{dt} - \frac{hTa(1-e^2)}{GMea(1+ecosf)} \tag{4.11}$$

e ricordando la (4.4) e la III legge di Keplero si ha ancora:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{2ea}\frac{da}{dt} - \frac{T(1-e^2)^{3/2}}{nea(1+ecosf)}. \tag{4.12}$$

Sostituendo la (4.5) riarrangiando e semplificando e che compare sia al numeratore sia al denominatore in tutti gli addendi, si ottiene infine:

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}[Rsinf + T\frac{2cosf + e + ecos^2f}{1+ecosf}] \tag{4.13}$$

che collega la derivata dell'eccentricità con le componenti radiale e binormale dell'accelerazione.

Per eccentricità piccole si ha al limite:

$$\frac{de}{dt} = \frac{Rsinf + 2Tcosf}{na} \tag{4.14}$$

Proseguendo, si potrebbero ottenere le altre equazioni. La più rilevante è quella che esprime la variazione dell'inclinazione in funzione della componente perturbatrice W e degli elementi orbitali:

$$\frac{dI}{dt} = W\frac{\sqrt{1-e^2}cos(f+\omega)}{na(1+ecosf)} \tag{4.15}$$

Come si vede la variazione degli elementi orbitali a, e dipende dalle due componenti radiale e binormale, mentre l'inclinazione dipende solo dalla componente W.

Oltre che per studiare l'effetto delle perturbazioni le formule di Gauss sono molto utili anche per i processi di tipo "impulsivo", nei quali la quantità realmente interessante non è l'accelerazione ma la variazione di velocità apportata da un qualche processo fisico in un tempo abbastanza breve rispetto al periodo orbitale, e per il quale si può quindi in prima approssimazione fare l'ipotesi di un cambiamento di velocità istantaneo. Può essere il caso di un razzo, ma è anche quello delle famiglie di asteroidi. Si vedano il cap.3 e il cap. 5 per ulteriori discussioni sulla natura degli oggetti e la fisica del processo di formazione. In questa sede limitiamoci a considerare la diversa formulazione delle equazioni di Gauss. Al posto di R,T e W si scrive Δv_r, Δv_θ,Δv_w, mentre le derivate temporali vengono sostituite da variazioni Δa, Δe e ΔI.

Le equazioni di Gauss possono anche essere invertite, dando, in base alle differenze degli elementi orbitali, le velocità relative, basate ovviamente sull'ipotesi di partenza da uno stesso punto, lungo un'orbita di riferimento che può essere quella iniziale del parent body o quella del centro di massa. È particolarmente interessante analizzare quello che succede nel piano dell'orbita. Sviluppiamo, per semplicità, i calcoli nel caso di eccentricità piccola. La (4,13) diventa:

$$\Delta e = \frac{\Delta v_r sinf + 2\Delta v_\theta cosf}{na} \tag{4.16}$$

mentre, ovviamente, sarà $\Delta a = 2\Delta v_\theta / n$. Si può facilmente ottenere:

$$\Delta v_\theta = n\Delta a/2 \tag{4.17}$$

$$\Delta v_r = na\frac{(\Delta e - \frac{\Delta a cos f}{a})}{sin f} \tag{4.18}$$

Come si vede, per $f = 0$ risulta una interessantissima relazione:

$$\Delta e = \Delta a/a \tag{4.19}$$

Nel piano a, e le variazioni di semiasse rispetto al punto di partenza si distribuiscono lungo una retta a 45^o. Una situazione abbastanza simile è stata effettivamente riscontrata per la famiglia di Karin, una famiglia molto giovane per la quale gli elementi orbitali ("propri") sono sufficientemente espressivi delle condizioni iniziali di formazione. Se l'anomalia è diversa, la relazione non è più vera. Per una distribuzione isotropa degli *ejecta*, come si può dimostrare, i frammenti si distribuiscono in una struttura più o meno ellissoidale il cui asse maggiore ruota fino a coincidere con l'asse delle a per $f = 90^o$ mentre l'ellisse diventa sempre meno eccentrica.

4.2 Equazioni di Lagrange (cenni)

Rimandiamo a [1, cap.12] per una discussione dettagliata. In sintesi, se si definisce l'hamiltoniana del sistema:

$$H(p, q, t) = \dot{q}_i p_i - L \tag{4.20}$$

dove L è la Lagrangiana del sistema, q_i, p_i sono le coordinate e i loro momenti coniugati (si somma sempre sugli indici ripetuti), e se si definiscono le "parentesi di Poisson" di due funzioni di $F(q, p), G(q, p)$:

$$\{F, g\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{4.21}$$

è facile dimostrare che per una generica funzione delle coordinate e del tempo si può scrivere:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{F, H\} \tag{4.22}$$

Nel caso che ci interessa l'hamiltoniana del sistema è ovviamente data dalla somma della hamiltoniana imperturbata H_0 e del termine perturbatore ψ. Gli elementi orbitali osculanti sono ovviamente funzioni delle coordinate e dei momenti, non dipendono esplicitamente dal tempo e, se non ci fosse la perturbazione, sarebbero costanti. Si può quindi scrivere, per un generico elemento orbitale c_a:

$$\frac{dc_a}{dt} = \{c_a, \psi\} = \{c_a, c_i\}\frac{\partial \psi}{\partial c_i} \tag{4.23}$$

(sempre con la convenzione degli indici ripetuti). Lo studio della variazione degli elementi orbitali si riduce a calcolare le derivate della funzione perturbatrice ψ e le parentesi di Poisson relative agli stessi elementi. Si usa spesso lavorare con le "parentesi di Lagrange"

$$[F, G] = \frac{\partial q_i}{\partial F}\frac{\partial p_i}{\partial G} - \frac{\partial p_i}{\partial F}\frac{\partial q_i}{\partial G} \tag{4.24}$$

legate alle parentesi di Poisson dalla regola, che applichiamo agli elementi orbitali:

$$\{c_i, c_j\}[c_j, c_k] = \delta_{ik} \tag{4.25}$$

Calcolare i due insiemi di parentesi è quindi equivalente. Nel problema in questione solo sei parentesi di Lagrange sono diverse da zero. Se usiamo come sesto elemento orbitale l'anomalia media ad un tempo prefissato M_0 (si veda il cap.1) le parentesi non nulle sono: $[\Omega, a], [\Omega, e], [\Omega, I], [\omega, a], [\omega$ Dal loro calcolo si ottengono, con un po' di lavoro, le equazioni di Lagrange (si veda [1, cap.12]). Tutte le equazioni collegano la derivata temporale dei tre elementi a, e, I alla dipendenza di ψ dai tre elementi angolari ω, Ω, M_0 e viceversa. Ciò renderà più facile mediare la perturbazione sul tempo. In particolare la prima equazione di Lagrange ha la forma:

$$\frac{da}{adt} = -\frac{2}{na^2}\frac{\partial\psi}{\partial M_0} \tag{4.26}$$

Da questa equazione è possibile arguire la stabilità dinamica del semiasse maggiore [1, cap.15]. Si veda invece [1, cap.12] per un raffinamento delle equazioni mediante una ridefinizione del sesto elemento orbitale.

4.3 Metodi di approssimazioni; sviluppo in serie di Fourier

In generale si hanno, per i diversi elementi orbitali c_a, delle equazioni, ottenute con uno dei possibili metodi di calcolo, della forma generale:

$$\frac{dc_a}{dt} = f_a[c_b(t), t] \tag{4.27}$$

Consideriamo per esempio una equazione come la 4.6 e facciamo l'ipotesi di avere T e a costanti durante un periodo di rivoluzione (stiamo facendo queste ipotesi solo per comodita' di ragionamento; di solito esse non saranno corrette; l'orbita è, tra l'altro, non chiusa in presenza di perturbazioni). Dividiamo ambo i membri dell'equazione per a e integriamo su un periodo di rivoluzione $\tau = 2\pi/n$: otteniamo, usando la terza legge di Keplero:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{4\pi T}{an^2} \propto Ta^2/GM. \tag{4.28}$$

In altri termini la variazione potenziale relativa di a durante un periodo orbitale è dell'ordine del rapporto fra la forza perturbatrice, di cui T è una componente, e la forza di gravità solare. In una situazione come quella del Sistema Solare, escludendo eventi particolari, quali incontri ravvicinati, la forza perturbatrice sarà dell'ordine del rapporto di massa μ fra il pianeta perturbante e il Sole, al massimo dell'ordine di 10^{-3} nel caso di Giove. Occorreranno quindi almeno $1/\mu$ periodi per cambiare nettamente un elemento orbitale, nel caso in cui una perturbazione agisca in modo costante (e quindi si possa usare una teoria al primo ordine). Se, come succede quasi sempre, gli effetti al primo ordine si cancellano, mediati sul tempo, un effetto al secondo ordine richiederà tipicamente μ^2 periodi orbitali, e uno al terzo μ^3 periodi. Poichè l'età del Sistema Solare è dell'ordine dei miliardi di anni, dovremo, per analizzarne l'evoluzione dinamica complessiva e, nel caso, accertarne la stabilità, studiare le perturbazioni fino al terzo ordine in μ.

In pratica una equazione come la 4.27 (o, meglio, il sistema di equazioni relativo ai vari elementi orbitali) si potrà integrare per via iterativa, ponendo a secondo membro gli elementi imperturbati e calcolandone la variazione, definendo poi dei nuovi elementi di partenza per calcolare il secondo membro e ottenere una stima migliore della variazione temporale a primo membro, e così via. Avremo delle variazioni a breve periodo, dipendenti dall'andamento della perturbazione durante un moto orbitale, e termini "secolari" dovuti al residuo netto dopo un periodo, in grado, nel caso, di accumularsi nel tempo.

Sia R_{12} il potenziale di interazione (perturbativo) dovuto all'interazione sul pianeta 1 dovuta al pianeta 2. Il potenziale dipende dalle posizioni dei due corpi. Un termine dipende solo dalla loro distanza, ed è ovviamente simmetrico per scambio, ma sviluppando i calcoli c'è un termine aggiuntivo che viene fuori dall'effetto che il pianeta perturbante (2) ha sul Sole:

$$R_{12} = -GM_1M_2[\frac{1}{r_{12}} - \frac{\vec{r_1}\vec{r_2}}{r_2^3}] \tag{4.29}$$

R_{12} può essere espresso mediante una serie in funzione degli elementi orbitali osculanti dei due corpi, sia di a, e, I sia degli angoli Ω, ω, f; questi ultimi sono più spesso espressi mediante parametri diversi da questi derivati, come la "longitudine media" λ o l'angolo $\bar{\omega}$. Rispetto alle definizioni date nel Cap.1, $\bar{\omega} = \omega + \Omega$ e $\lambda = \bar{\omega} + M$, dove M è l'anomalia media. Si ha:

$$R_{12} = C_{ijki'j'k'}cos(\Psi_{ijki'j'k'}) \tag{4.30}$$

dove, ovviamente, la somma si effettua su tutti i sei indici ripetuti. Gli indici ijk si riferiscono al corpo 1, mentre $i'j'k'$ si riferiscono al corpo 2. I termini C sono funzioni degli elementi orbitali a, e, I dei due corpi, mentre:

$$\Psi_{ijki'j'k'} = i\lambda_1 + j\bar{\omega}_1 + k\Omega_1 + i'\lambda_2 + j'\bar{\omega}_2 + k'\Omega_2 \tag{4.31}$$

Alcune semplificazioni possono essere apportate. Innanzitutto la somma comprende solo termini in coseno, e inoltre (regola di D'Alembert, derivata da considerazioni di simmetria) $i + j + k + i' + j' + k' = 0$.

Un modo di utilizzare queste complesse espressioni passa attraverso operazioni di media. Poichè tra gli argomenti le longitudini sono quelle che variano più rapidamente, si può effettuare una media sul toro costruito con le longitudini:

$$< R >= \frac{1}{2\pi^2} \int R d\lambda_1 d\lambda_2 \tag{4.32}$$

Questa media è equivalente alla media temporale (fatta ovviamente su una scala intermedia fra il breve tempo definito dai moti orbitali e i tempi caratteristici dell'evoluzione a lungo termine) se vale una ipotesi di tipo *ergodico*, ossia se tutti i punti sulla superficie del toro sono equiprobabili. Ciò è vero di solito, ma non quando i periodi sono tra di loro commensurabili. Se $in_1 + i'n_2 = 0$ il moto nella varietà toroidale definita dalle longitudini tende a ripetere periodicamente la stessa traiettoria; l'ipotesi ergodica non è soddisfatta e siamo nel tipico caso di **risonanza**.

4.4 Risonanze e fenomeni caotici

La trattazione generale del fenomeno delle risonanze è troppo complessa per essere qui sviluppata. In generale si ha una risonanza quando la fase espressa dalle eq.4.31 è stazionaria (non varia quindi nel tempo): si rende in questo modo non valida l'ipotesi ergodica o, detto altrimenti, gli integrali nel coseno non hanno media zero ma crescono linearmente con il tempo. Le risonanze **di moto medio** sono caratterizzate dalla commensurabilità dei due periodi orbitali: $in_1 + i'n_2 = 0$. Più questa commensurabilità coinvolge termini di ordine basso, e questo succede quando il rapporto fra i periodi può essere espresso da una frazione in cui sia denominatore sia numeratore sono numeri piccoli, più l'effetto perturbatore diviene importante. Più precisamente, la fase nella 4.31 resta costante per un maggior periodo di tempo quando si combinano anche i periodi di variazione delle variabili angolari (moti del perielio e della linea dei nodi). In questo caso gli effetti a lungo termine sono ancora più rilevanti. Nel caso particolare $i = i' = 0$ la risonanza è esclusivamente fra le variazioni a lungo termine delle variabili angolari, e prende il nome di **risonanza secolare**. Le risonanze secolari hanno un ruolo a volte molto importante: per esempio effetti vistosi di spopolamento, dovuti alla risonanza secolare denominata ν_6, sono stati riscontrati nella fascia asteroidale. Meno chiaro è il ruolo delle risonanze secondarie (quelle per cui numeratore e denominatore sono numeri più grandi). La loro importanza è stata probabilmente sottovalutata fino a pochi anni fa.

L'intensità della perturbazione risonante può causare importanti processi di evoluzione orbitale, spesso pilotati da un rapido aumento di eccentricità e/o inclinazione. Si entra sovente in regime **caotico**.

Tecnicamente un sistema dinamico si definisce caotico se c'é una elevata sensibilità alle condizioni iniziali, ovvero se a variazioni anche molto piccole delle condizioni iniziali possono corrispondere evoluzioni a lungo termine molto diverse e quindi non è possibile fare previsioni sulla evoluzione a lungo termine. Questo non prevede però un allontanamento all'infinito: di norma le traiettorie, nello spazio delle fasi, sono diverse e dipendono in modo apparentemente stocastico dalle condizioni iniziali, ma restano confinate.

Per fare due esempi, una "mappa" definita dall'equazione:

$$x_{n+1} = hx_n(n > 1) \tag{4.33}$$

causa un allontanamento asintotico divergente anche partendo da condizioni iniziali molto simili:

$$\Delta x_n = x_n(x_0 + \Delta x_0) - x_n \xrightarrow[n \to \infty]{\to} h^n \Delta x_0 \to \infty \tag{4.34}$$

ma questo allontanamento è regolare, non caotico. Il caso forse più semplice di mappa (unidimensionale) caotica è forse la cosiddetta "mappa logistica":

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n) \tag{4.35}$$

dove x_0 è compreso fra zero e uno e $4 > A > 0$. Idealmente questa mappa potrebbe rappresentare l'evoluzione di una popolazione, con un dato livello di "natalità" definito da A e un termine di "lotta per la sopravvivenza" (tanto più dura quanto più la popolazione è grande) dato dall'espressione in parentesi. A parte il (rozzo) significato demografico, questa mappa rappresenta un esempio interessante. Il valore di x (nel dato intervallo di A) si mantiene sempre fra zero e uno. Asintoticamente, per $A < 1$ $x \to 0$, per valori superiori di $A \leq 3$ avremo una convergenza (rapida o con oscillazioni) fino a un valore $1 - 1/A$. Per valori superiori a 3 avremo una popolazione che oscilla prima fra due valori, poi tra 4, 8 ecc; ma per valori superiori a $\simeq 3.57$ avremo un andamento stettamente caotico, con fluttuazioni significative anche per variazioni infinitesime del valore iniziale.

In regime caotico una differenza estremamente piccola delle condizioni iniziali porta ad una crescita (inizialmente) esponenziale della differenza con il tempo:

$$\Delta x(t) = \Delta x_o e^{\lambda t}. \tag{4.36}$$

In un caso discreto come quello della mappa logistica si può pensare come unitario l'intervallo che separa due passaggi successivi. Si può definire

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{4.37}$$

e quindi per una piccola differenza:

$$dx_{n+1} = \frac{df}{dx} dx_n \tag{4.38}$$

per cui $\lambda = log(df/dx)$ dove la derivata è presa in valore assoluto.

Il parametro λ prende il nome di **esponente di Lyapounov**. Se $\lambda > 0$ si ha un regime caotico. Per il caso discreto sopra definito abbiamo un valore "locale" che dipende da x_n.

La rilevanza dei processi caotici nella realtà è stata scoperta da Lorenz, nell'ambito di studi sull'evoluzione dell'atmosfera e sulla possibilita' di fare previsioni meteorologiche. Lorenz scoprì che l'evoluzione di certi sistemi, definiti da sistemi di equazioni differenziali apparentemente abbastanza semplici, poteva cambiare qualitativamente cambiando di pochissimo le condizioni iniziali. Dal lavoro di Lorenz, che è del 1963, la presenza di fenomeni caotici in vari ambiti è diventata sempre più chiara, e le applicazioni in Meccanica Celeste sono solo uno di questi.

La situazione è ovviamente più complessa, rispetto al caso precedentemente illustrato, quando si ha un problema multidimensionale, come nei casi dinamici di nostro interesse. L'evoluzione del sistema, per condizioni iniziali di poco differenti, può essere diversa a seconda di quali condizioni iniziali differiscono (se le condizioni sono, per esempio, posizione e velocità ad un certo istante, la variazione delle condizioni iniziali può riguardare una o più delle sei; e gli effetti possono essere diversi). Con una procedura simile a una diagonalizzazione si trovano n autovalori, n esponenti di Lyapounov. Il comportamento caotico si ha anche se uno solo di essi, il più grande, è positivo; ed è questo che definisce il "tempo di Lyapounov" (inverso di λ), possibile tempo scala della evoluzione caotica. Quello che succede su tempi scala più lunghi non è, ricordiamo, prevedibile a questo livello. Nei plot degli elementi propri precedentemente riprodotti (Cap.3) venivano evidenziati i corpi le cui orbite erano caotiche e con un tempo di Lyapounov al disotto di un certo valore limite. Va ribadito che questo non garantisce che ci sia una evoluzione dinamica "drammatica" ma è solo un indicatore di potenziale instabilità. Si vedano [1] e testi di Meccanica Celeste avanzata per ulteriori dettagli.

Per concludere questa breve introduzione ai fenomeni caotici, presentiamo di seguito un caso relativamente semplice, e adatto anche a sperimentazioni didattiche, quello della "ruota ad acqua di Lorenz" (v. Fig. 4.2). La ruota, a quanto pare ideata dal matematico Malkus, ma poi denominata "di Lorenz" a causa della sostanziale equivalenza delle equazioni che la regolano

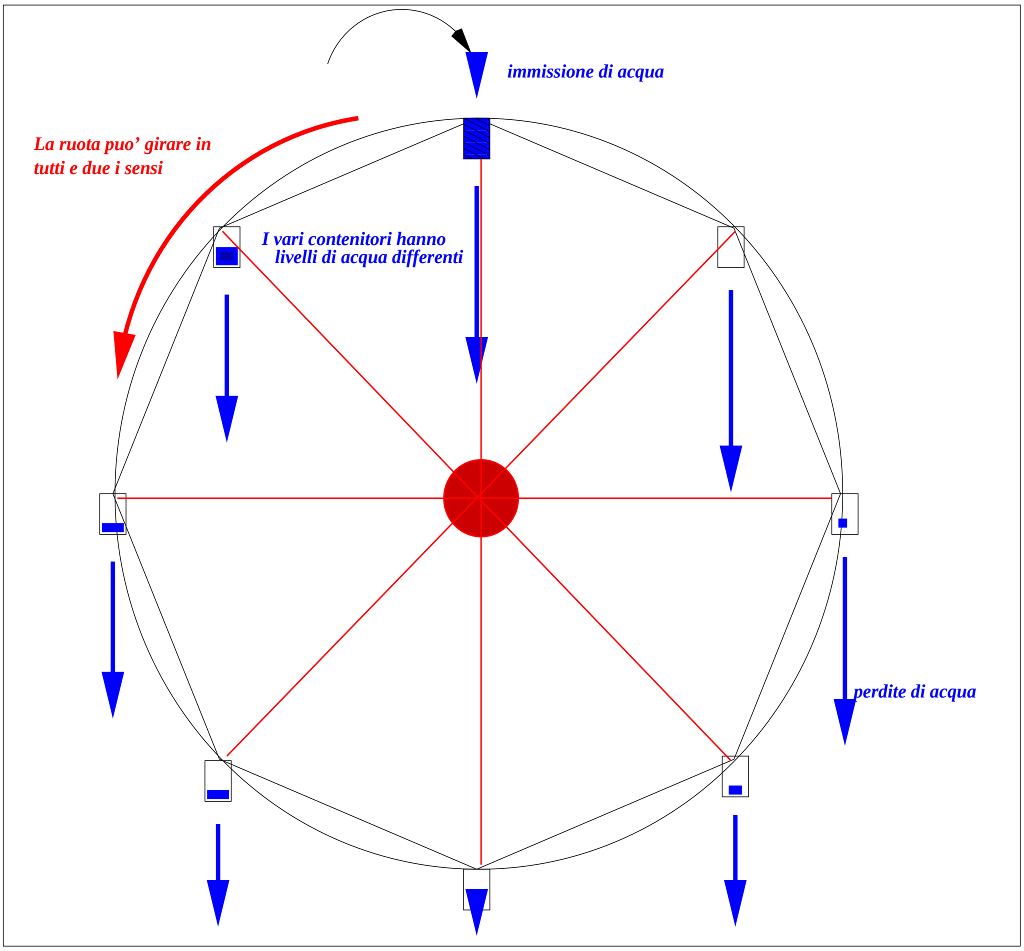

Figure 4.2: La ruota ad acqua di Lorenz.

con quelle ottenute da Lorenz nel suo modello fluidodinamico, consiste in una ruota girevole, verticale o inclinata, con un certo numero di contenitori con un foro in basso. la ruota viene piazzata sotto un getto d'acqua, che viene attivato e riempie il contenitore (o i contenitori) che si trova sotto di esso. Se la ruota gira, i diversi contenitori passeranno via via sotto il getto e verranno riempiti. Nel frattempo tutti i contenitori si svuotano a causa del foro.

Il sistema, quando i contenitori sono parzialmente riempiti (ciascuno in misura diversa) non e' all'equilibrio rispetto alle forze di gravità, e sui mette quindi in rotazione. I parametri fisci rilevanti sono:

- il tasso di riempimento da parte del rubinetto
- il tasso di svuotamento dai fori
- la geometria della ruota, i volumi e le dimensioni dei contenitori, le forze di attrito ecc.

Cambiando questi parametri la ruota può stare ferma, ruotare sempre nello stesso senso, o cambiare continuamente il senso di rotazione. In quest'ultimo caso sono presenti dei cmportamenti caotici, come si rileva anche dalle molte simulazioni o al comportamento dei numerosi modellini costruiti nei laboratori didattici.

Non è difficile scrivere le equazioni del sistema (ci rifaremo qui a una presentazione dovuta a M.Gerholdt, 2009). I parametri del sistema sono l'angolo della ruota rispetto a una direzione definita θ, la sua derivata temporale ω, la distribuzione di massa dell'acqua nei contenitori, esprimibile mediante una funzione $m(\theta, t)$, i rates di riempimento $Q(\theta)$ e di svuotamento K (quest'ultimo assunto uguale per tutti i contenitori), raggio r, coefficiente di smorzamento della rotazione ν e momento d'inerzia della ruota I.

L'equazione che determina la variazione nel tempo della funzione m contiene i rates di riempimento e di svuotamento più un termine che dipende dalla velocità angolare e che quindi introduce una dipendenza dal tempo di m attraverso la sua dipendenza da θ:

$$\frac{dm}{dt} = Q - Km - \omega \frac{\partial m}{\partial t} \tag{4.39}$$

L'equazione che determina la variazione del momento angolare sarà invece:

$$I\frac{d\omega}{dt} = -\nu\omega + gr \int_0^{2\pi} m(\theta, t) sin\theta d\theta. \tag{4.40}$$

Data la periodicità in θ le varie funzioni possono essere sviluppate in serie di Fourier; per la Q, se il getto d'acqua è simmetrico rispetto alla verticale ($\theta = 0$) si avranno solo i termini in coseno. Se a_n, b_n sono i termini dello sviluppo di m, rispettivamente in seno e coseno, e q_n quelli di Q, arriveremo alla fine ad un insieme di equazioni (ciascuna relativa o agni termine dello sviluppo):

$$\frac{da_n}{dt} = n\omega b_n - Ka_n; \frac{db_n}{dt} = -n\omega a_n - Kb_b + q_n; \frac{d\omega}{dt} = \frac{-\nu\omega + \pi gra_n}{I} \tag{4.41}$$

Il sistema di equazioni relativo al primo termine dello sviluppo (con a_1, b_1, q_1) può esser reso identico, con opprtune trasfiormazioni di variabili) a un caso particolare delle equazioni originali di Lorenz:

$$\dot{x} = \sigma(y - x); \dot{y} = rx - xz - y; \dot{z} = xy - z \tag{4.42}$$

e il comportamento sarà, ovviamente, lo stesso.

Per piccoli flussi d'acqua la ruota sarà ferma, bloccata dalle forze resistive; da un certo valore in poi, comincerà ruotare in un senso o nell'altro (il senso viene deciso da un infinitesimo spostamento dal punto di equilibrio $\omega = 0$ ora divenuto instabile). Ma per flussi ancora aumentati saranno possibili moti con un cambiamento di senso di rotazione. Il comportamento sul lungo termine sarà molto diverso anche per condizioni inziali molto vicine: il tipico comportamento caotico, anche se le velocità angolari resteranno sempre, in un senso o nell'altro, ben limitate.

4.5 Evoluzione dinamica del Sistema Solare

Lo studio dell'evoluzione dinamica complessiva del Sistema Solare esula dagli scopi della nostra discussione. Riportiamo solo alcune considerazioni qualitative:

- La stabilità del semiasse maggiore non garantisce da sola la stabilità del Sistema, che potrebbe essere inficiata, per esempio, da variazioni rilevanti di altri elementi orbitali, quale per esempio l'eccentricità, causanti incontri ravvicinati o al limite collisioni planetarie. Inoltre anche la stabilità del semiasse maggiore è stata dimostrata al primo ordine, ma non al secondo, e tantomeno al terzo ordine, che pure è necessario indagare per lo studio dell'evoluzione del sistema durante tutto il suo tempo di vita.

- L'evoluzione a lungo termine del Sistema può essere studiata solo mediante complesse integrazioni numeriche. In realtà integrazioni su tempi maggiori di 10^7 anni cominciano a rivelare termini caotici, che rendono impossibile prevedere la posizione dei pianeti su scale temporali superiori (i tempi di Lyapounov per i pianeti interni sono anche dell'ordine di solo $5My$). Lo scopo degli studi più a lungo termine è quindi solo l'analisi generale dell'evoluzione orbitale (se ci sono termini secolari, possibili derive, o fenomeni caotici che possano provocare evoluzioni qualitativamente significative delle orbite planetarie). Un certo aiuto può anche essere fornito dalla cosiddetta "teoria sintetica" che, utilizzando le integrazioni numeriche, filtrate dai termini a breve periodo, cerca di provvedere un modello di evoluzione a lungo termine.

- Le integrazioni numeriche si sono molto raffinate negli ultimi anni, specialmente grazie alla introduzione dei cosiddetti "algoritmi simplettici" [1], che permettono di evolvere il sistema rispettando la condizione della conservazione dell'energia (in genere non garantita dalle altre simulazioni numeriche a differenze finite). Gli algoritmi simplettici permettono una integrazione su tempi scala dell'ordine dei miliardi di anni. Tali integrazioni comportano notevoli elementi di criticità anche in merito alla propagazione dell'errore numerico, peraltro non insuperabili. Esistono simulazioni che si spingono anche oltre i dieci miliardi di anni.

- Per quello che al momento possiamo affermare con certezza, il moto dei pianeti presenta numerose oscillazioni sia a breve periodo sia a periodo più lungo. Già sulla scala dei

$100My$, oltre ai già citati fenomeni caotici, si rilevano significativi scambi di energia fra i pianeti, che potrebbero preludere a fenomeni di instabilità. Più si va a scale temporali lunghe, più la situazione diventa incerta. Non sembra di poter prevedere una instabilità complessiva del sistema nel remoto futuro, anche se la situazione non è ancora del tutto chiara, ma pianeti come Mercurio, o anche Marte, potrebbero anche subire evoluzioni orbitali estremanente significative. Secondo alcune simulazioni, addirittura, Mercurio potrebbe essere espulso dal Sistema Solare nel giro di uno o pochi miliardi di anni. La stabilità a lungo termine del Sistema Solare, anche ristretto ai pianeti, resta un'ipotesi. Il sistema potrebbe anche essere instabile o marginalmente stabile.

- Gli studi di stabilità del Sistema Solare hanno anche fornito un potente strumento di analisi dell'evoluzione dinamica dei sistemi extrasolari; si vedano i capitoli 7 e 8.

È anche interessante rilevare come i modelli numerici di evoluzione dinamica abbiano anche permesso di affrontare un altro problema, quello delle possibili interazioni *spin–orbita* ossia dell'effetto delle perturbazioni sulle proprietà rotazionali dei pianeti, tenendo conto anche della loro forma (non sferica) e della distribuzione di massa (si vedano a proposito le lezioni del Corso di Astrofisica, parte di Astronomia e Meccanica Celeste). In due fondamentali lavori degli anni '90, J. Laskar e P. Robutel hanno dimostrato che gli effetti delle perturbazioni planetarie sulle proprietà rotazionali sono estremanente rilevanti soprattutto per i pianeti interni, fino al punto di poter escludere che le attuali proprietà rotazionali siano diretta conseguenza dei processi di formazione. Per Mercurio e Venere hanno giocato un ruolo dominante le interazioni di tipo mareale con il Sole, che hanno causato un progressivo rallentamento della rotazione, ma anche le interazioni con gli altri pianeti hanno contribuito ad una fase caotica di evoluzione. Per la Terra e Marte è possibile dimostrare come, per un ampio range di periodi di rotazione e di inclinazione dell'asse sul piano dell'orbita, si abbia una evoluzione caotica degli stessi. Sia per la Terra che per Marte l'asse di rotazione potrebbe facilmente cambiare nel tempo la sua inclinazione da valori bassi (come gli attuali, intorno a 20^0) fino a oltre 60^0, in un tempo scala dell'ordine del milione di anni. Ciò succede in effetti solo per Marte. Per la Terra la presenza della Luna agisce da potente stabilizzatore e l'asse di inclinazione ha variazioni molto più contenute.

La presenza della Luna ha quindi un potente effetto di stabilizzazione anche del clima, al punto che secondo alcuni Autori (si veda il cap.8) solo in pianeti terrestri con un grosso satellite simile alla Luna è concepibile uno sviluppo della vita dalle sue forme più elementari a organismi complessi ed evoluti (come i mammiferi e, successivamente, l'essere umano).

Per quanto riguarda Marte le grosse oscillazioni dell'asse di rotazione potrebbero rafforzare l'ipotesi, fatta in base alle caratteristiche di alcune regioni della superficie del pianeta, della possibile esistenza, nel passato, di grandi distese di acqua, veri e propri mari. L'acqua allo stato liquido sulla superficie non è compatibile con le attuali condizioni "climatiche" di Marte, ma esse potrebbero essere state molto diverse in passato.

4.6 Elementi propri

Le considerazioni sviluppate in precedenza ci rendono anche più chiara le motivazioni per cui sono stati definiti gli **elementi propri**: ottenere degli elementi che rappresentino in qualche modo una costante del moto, non influenzata da oscillazioni a medio e breve periodo.

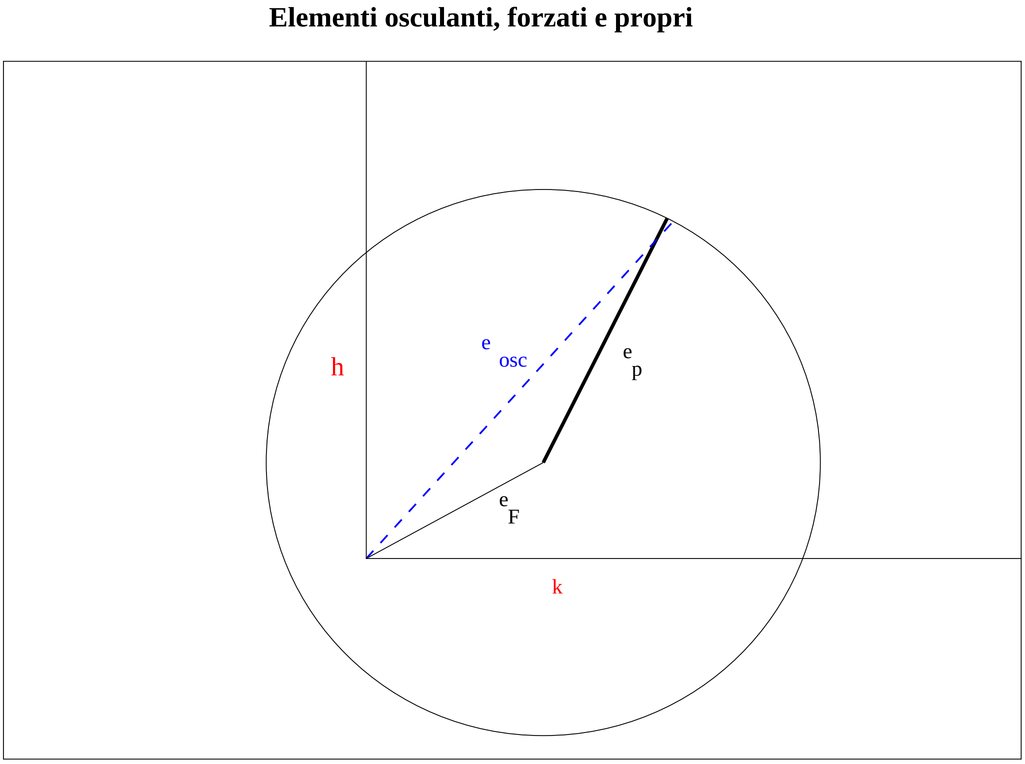

Figure 4.3: Elementi osculanti, forzati e propri: il caso della eccentricità. ω è un angolo variabile nel tempo con un periodo spesso dell'ordine di $10^5 - 10^6 y$.

La teoria degli elementi propri è complessa. Per darne una interpretazione elementare dobbiamo passare alla definizione degli elementi orbitali "non singolari" h, k, P, Q (si veda [1], cap.12). Questi elementi sono stati definiti per evitare divergenze nelle equazioni perturbative quando eccentricità e inclinazione tendono a zero. Si ha:

$$h = esin\bar{\omega};\ k = ecos\bar{\omega};\ P = sinIsin\Omega;\ Q = sinIcos\Omega. \tag{4.43}$$

L'evoluzione dinamica può essere rappresentata da una traiettoria nel piano k, h o nel piano Q, P. Un corpo soggetto a perturbazioni planetarie percorre sul piano un moto complesso ma che può essere in prima approssimazione fittato con un moto circolare, una volta eliminate ("filtrate") le oscillazioni a corto periodo. Mentre l'elemento orbitale "osculante" è dato dalla distanza dall'origine di un punto sulla traiettoria, e quindi varia nel tempo, il raggio della circonferenza "di best fit" (costante almeno su una scala temporale medio–lunga) definisce l'elemento proprio. Si veda la figura 4.3. L'importanza degli elementi propri è cruciale soprattutto per lo studio di fenomeni evolutivi a lungo termine o per la identificazione di famiglie di oggetti legati da una origine comune (Cap.3).

4.7 Effetti dinamici non legati alla gravitazione: pressione di radiazione e Poynting–Robertson

La pressione di radiazione (in particolare quella dovuta alla radiazione solare) agisce su un corpo planetario. Nell'ipotesi di un corpo perfettamente assorbente (cioè di albedo nulla) la radiazione trasmette al corpo un impulso per unità di tempo proporzionale al flusso F di energia elettromagnetica incidente (definito tramite il vettore di Poynting) e alla sua superficie S; la forza esercitata sarà:

$$\vec{f} = \frac{S\vec{F}}{c} \tag{4.44}$$

il cui modulo potrà essere espresso in termini della costante solare $F_0 = 1.37 \cdot 10^6 erg cm^{-2} s^{-1}$:

$$f = SF_0/c(1UA/r)^2 \tag{4.45}$$

La forza ha la stessa dipendenza dalla distanza e la stessa orientazione (anche se il verso è opposto) di quella di gravità. Il rapporto fra le intensità delle due forze dipende in primo luogo dalle dimensioni del corpo e può essere facilmente stimato:

$$\beta \propto S/m \simeq 5.8 \cdot 10^{-5}/(\rho R) \tag{4.46}$$

dove m è la massa del corpo e le sue densità e raggio sono espresse in cgs. Per un asteroide di un chilometro, con densità un po' inferiore a $2g/cm^3$, $\beta \simeq 3 \cdot 10^{-10}$. L'effetto è quindi piccolo per corpi di dimensione astronomicamente interessante, e può essere in generale trattato come una correzione alla forza di gravità (come se la massa del Sole, per esempio, fosse un po' diversa). Non ci sono effetti secolari, essendo la forza radiale. L'effetto è invece importante per polveri e simili.

Le cose non cambiano qualitativamente cambiando qualche ipotesi: per esempio per un corpo perfettamente riflettente la forza raddoppia di intensità, ma resta sempre radiale. Le cose cambierebbero invece radicalmente se fosse presente un trasferimento di quantità di moto **trasversale**.

Calcoliamo l'effetto di una accelerazione dipendente dalla distanza come quella di gravità (si veda l'eq. 4.28) ma lungo la direzione del moto. Sulla base delle equazioni di Gauss questa forza cambia sia il semiasse maggiore sia l'eccentricità (eq. 4.5 e 4.13). Ma la variazione della seconda ha un andamento periodico lungo l'orbita e può essere, in prima approssimazione, trascurata. Possiamo allora fare l'ipotesi di una orbita inizialmente circolare e che resta tale, e in cui cambia solo il semiasse maggiore. L'equazione di Gauss prende la forma:

$$\frac{da}{dt} = 2T(a)/n(a) = Ca^{-2}a^{3/2} = C/\sqrt{a} \tag{4.47}$$

dove C è una costante moltiplicativa. Se prendiamo come intensità della accelerazione $T = \gamma g = \gamma G M_\odot a^{-2}$ avremo allora:

$$C = 2\gamma\sqrt{GM_\odot} \tag{4.48}$$

Se facciamo l'ipotesi, per esempio, di una accelerazione opposta al senso del moto, per cui il semiasse maggiore diminuisce, possiamo integrare tra un valore iniziale a_0 ed un valore finale generico a, ed usando la relazione $n_0^2 a_0^3 = GM_\odot$ si ottiene infine:

$$a(t) = a_0(1 - 3\gamma n_0 t)^{2/3} \tag{4.49}$$

che definisce un tempo scala $\tau \simeq 1/(\gamma n_0)$ per l'azzeramento o una diminuzione sostanziale di a. Confermando le considerazioni qualitative fatte nel par. 4.3, il tempo scala è in sostanza dato da $1/(2\pi\gamma)$ periodi orbitali. Per una variazione meno drastica del semiasse maggiore è ovviamente necessario un tempo minore. Per esempio una variazione dell'uno percento richiede un tempo dell'ordine di:

$$\tau_{1\%} \simeq \frac{10^{-3}T}{\gamma} \tag{4.50}$$

dove T è il periodo orbitale del pianeta.

Passiamo ora a valutare γ. Se l'effetto è dovuto in qualche modo alla radiazione solare, non è ipotizzabile un termine trasversale maggiore di quello radiale, e sarà $\gamma = \alpha\beta$ (v. sopra) con $\alpha < 1$.

Un effetto trasversale viene dato da una correzione relativistica (**effetto Poynting Robertson**) che illustreremo di seguito e, soprattutto, dall'effetto Yarkovsky, descritto nel paragrafo successivo.

Se un corpo, irraggiato dal Sole, riemette l'energia ricevuta, questa emissione sarà, nell'ipotesi di una superficie isoterma, isotropa **nel sistema solidale con il corpo** ma non in un sistema eliocentrico. In un sistema eliocentrico ci sarà un termine trasversale dell'ordine della forza di radiazione di cui sopra moltiplicata per un fattore v/c, dove v è la velocità orbitale del corpo. Si veda anche [1,1bis] per una discussione più approfondita. Tipicamente $v/c \simeq 10^{-4}$, e quindi questo sarà anche il valore di α. Per un oggetto di un chilometro anche una variazione dell'uno per cento del semiasse maggiore richiederà quindi un tempo enorme: $\tau_{1\%} \simeq 10^{11}$ periodi orbitali. L'effetto sarà invece estremamente rilevante per le polveri.

4.8 Effetto Yarkovsky

Un altro effetto dinamico non legato alla gravitazione, e la cui importanza per l'evoluzione degli asteroidi è stata recentemente riconosciuta, è l'**effetto Yarkovsky**, così denominato dal nome del suo scopritore. Il principio su cui l'effetto si basa è molto semplice. Se un corpo –planetario, ma anche una sonda o un satellite artificiale– viene irraggiato, parte della radiazione viene temporaneamente assorbita, e riemessa più tardi. La rotazione del corpo crea delle disomogeneità periodiche nella temperatura della superficie: l'emisfero esposto al Sole è di norma più caldo di quello "notturno". Non solo, a causa del ritardo con cui la radiazione viene riemessa, questo provoca anche una asimmetria rispetto al ciclo dell'illuminazione, per cui, come sappiamo anche per diretta esperienza, il pomeriggio è abitualmente più caldo della mattina.

La riemissione ritardata della radiazione produce anche un effetto dinamico. La asimmetria nella temperatura fra gli emisferi che seguono e precedono il "punto subsolare" fa sì che nelle due direzioni perpendicolari alla congiungente Sole–pianeta venga emessa sistematicamente una quantità diversa di radiazione. Mentre l'impulso trasferito dalla radiazione entrante è parallelo alla congiungente Sole–pianeta, ed ha quindi un modesto effetto dinamico (si veda la discussione relativa all'effetto della pressione di radiazione) quello, di "rinculo", dovuto alla radiazione riemessa in direzione perpendicolare, e dovuto alla sopradescritta asimmetria, è trasversale, e in grado, quindi, di cambiare il semiasse maggiore (v. Fig. 4.4)

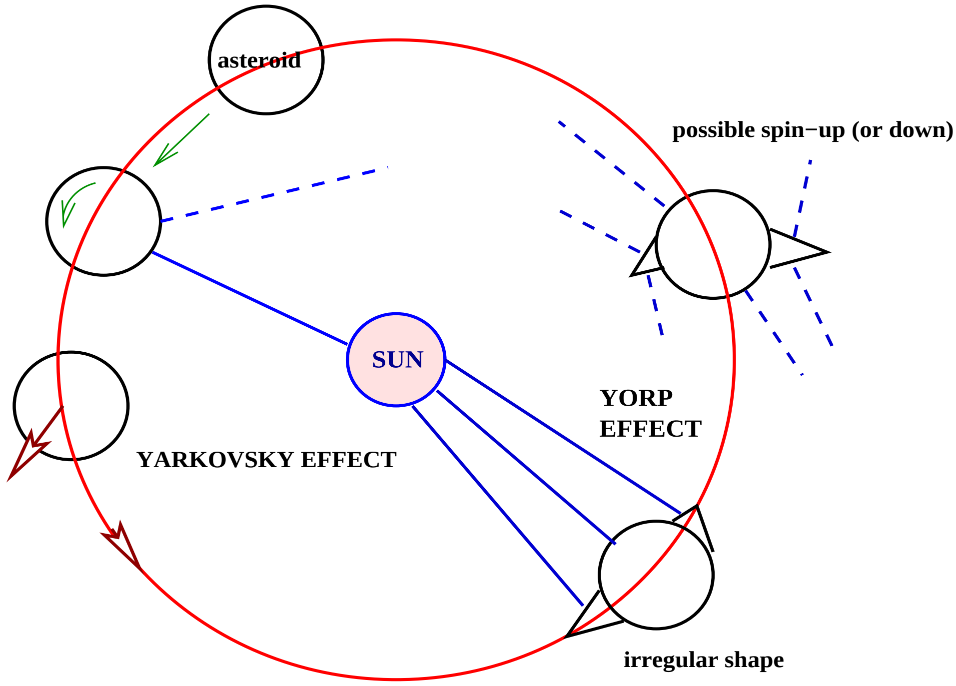

Figure 4.4: Rappresentazione schematica dell'effetto Yarkovsky (diurno) e del possibile effetto YORP.

Come si vede anche dalla figura, l'impulso trasversale ha un verso che dipende dal verso di rotazione del pianeta. Se la rotazione è **prograda**, ossia con il vettore di spin parallelo a quello del momento angolare orbitale, l'impulso trasferito è nel senso del moto, e provoca quindi una accelerazione e, di conseguenza, l'aumento del semiasse maggiore. Se la rotazione è invece **retrograda** il semiasse maggiore diminuisce. Si noti che la discussione che abbiamo fatto finora è basata sulla (drastica) ipotesi che i due vettori di spin e di momento angolare orbitale siano allineati (paralleli o antiparalleli). In una trattazione correttamente tridimensionale essi possono essere orientati diversamente. Il discorso fatto vale allora per le componenti del vettore di spin perpendicolari al piano dell'orbita. L'effetto dinamico dipende quindi dal coseno dell'angolo compreso tra i due vettori, e si annulla completamente quando il vettore di spin giace sul piano dell'orbita.

Per completezza dobbiamo anche citare l'effetto Yarkovsky *stagionale*, che si basa sullo stesso principio ma che è legato alla variazione dell'angolo formato dal vettore di spin con la direzione del moto lungo l'orbita (si veda [1]). L'effetto è in questo caso presente quando il vettore di spin ha componenti sul piano dell'orbita, e raggiunge la massima intensità quando esso giace su questo piano. L'effetto complessivo è sempre nel senso di una diminuzione del semiasse maggiore, ma la rilevanza quantitativa è di molto inferiore, ragion per cui non ce ne occuperemo in questa sede.

Una stima dell'importanza dell'effetto Yarkovsky non è facile. Nondimeno possiamo sfruttare le considerazioni fatte nel paragrafo precedente per stimare il parametro che abbiamo chiamato α. Esso è ovviamente inferiore all'unità per diversi motivi:

- La pressione di radiazione è relativa all'intero flusso di energia proveniente dal Sole. Quella utile per l'effetto Yarkovsky è solo la parte prima assorbita e poi riemessa. La correzione, tuttavia, non è molto rilevante, anche per la bassa albedo di gran parte degli asteroidi (si veda il Cap.3), che sono i corpi più interessati dall'effetto Yarkovsky.

- La pressione di radiazione è tutta in un verso, quello dal Sole al corpo; per l'effetto Yarkovsky conta la **differenza** fra le emissioni in senso progrado e retrogrado. Questa differenza non è di facile valutazione. Se si pensa ad un irraggiamento termico secondo la logica del corpo nero, per cui l'emissività è proporzionale alla quarta potenza della temperatura, tutto si riduce ad un integrale della forma:

$$\vec{a_Y} \propto T_e^3 \int \Delta T d\vec{S} \tag{4.51}$$

  dove $d\vec{S}$ è l'elemento di superficie, identificato dal suo vettore normale. La differenza di temperatura ΔT, presa ovviamente rispetto ad un valore medio, varia periodicamente con la rotazione del pianeta, sfasata di un angolo ϕ_{th} rispetto alla fase del pianeta (effetto "pomeriggio"), con un andamento della forma:

$$\Delta T \propto e^{i(2\pi\omega t + \phi_{th})} \tag{4.52}$$

  L'entità dell'effetto dipende ovviamente dalla costante di proporzionalità e dal valore dello sfasamento ϕ_{th}. Certamente la differenza di temperatura è sempre minore della temperatura. Per la Terra l'escursione termica giorno–notte è di regola inferiore al 5%, valore ovviamente ridotto per la presenza dell'atmosfera e dei mari. Per un corpo minore, privo di atmosfera, l'effetto può essere anche molto maggiore, e dipende anche dal periodo di rotazione; per una rotazione molto veloce si ha ovviamente una minore escursione termica. Per una rotazione molto lenta, peraltro, la asimmetria mattina–pomeriggio diventa minore. I due effetti rendono interessanti soprattutto corpi in rotazione mediamente veloce, come sono, d'altro canto, molti asteroidi.

- Un ulteriore termine riduttivo è dato, come già detto, dalla orientazione dell'asse di rotazione, non necessariamente perpendicolare al piano orbitale. Inoltre l'asse di rotazione può cambiare –al limite invertirsi– nel tempo, a causa, per esempio, di processi collisionali. Tali processi possono d'altro canto causare anche la distruzione del corpo. Ciò limita il tempo utile per l'effetto ad un tempo τ che dipende dalle dimensioni e che è minore –a volte di molto– dell'età del Sistema Solare. Per corpi di un chilometro il massimo tempo utile può essere dell'ordine di $10^8/10^9$ anni, per corpi di un metro dell'ordine, al più, di una decina di milioni di anni.

- Infine, per corpi piccoli –inferiori, per esempio, ad un metro– la penetrazione del calore non permette lo stabilirsi di un significativo gradiente di temperatura, e l'effetto diviene progressivamente meno significativo.

Tutte le considerazioni fatte sopra portano alla conclusione che il valore di α debba essere significativamente inferiore all'unità. Ricordiamo che se $\alpha = 1$, per corpi di un chilometro, si potrebbe avere una evoluzione di qualche centesimo di unità astronomica in un tempo $\tau_{1\%}$ dell'ordine al massimo di 10^7 anni. In realtà, secondo i modelli più accreditati, variazioni di questa entità (si veda per es. la fig. 2 in [Bottke, Capitolo di Asteroids III]) hanno luogo durante l'intera vita collisionale del corpo, ossia in un tempo maggiore di alcune decine di volte.

La stima dell'intensità dell'effetto è comunque complessa e controversa, ed esiste al momento una unica misura sperimentale, a confortare i modelli teorici. Sembra comunque accertato che oggetti di dimensioni comprese fra un metro ed alcuni (forse 10) chilometri di raggio possano subire, nel corso della loro vita, un cambiamento del loro semiasse maggiore dell'ordine di 0.01 AU o superiore. Anche altri elementi orbitali, ed in particolare l'eccentricità, possono subire, per effetto diretto o indiretto, delle significative variazioni.

Questo spostamento è di estrema importanza almeno per due motivi:

- Le proprietà osservate delle famiglie dinamiche, ed in particolare la loro distribuzione nello spazio degli elementi orbitali, sono condizionate non solo dalle condizioni iniziali all'atto della loro formazione e dalla evoluzione dinamica standard, ma anche da un "rumore" introdotto dall'effetto Yarkovsky che, come abbiamo detto, agisce diversamente in base alle proprietà rotazionali e alle dimensioni dei corpi. Questo potrebbe riconciliare le previsioni relative alla fisica degli impatti (generatori delle famiglie; si veda il Cap. 5) con le osservazioni astronomiche. Discuteremo meglio questo punto nel paragrafo seguente.

- Anche una limitata mobilità orbitale può immettere un asteroide in una regione risonante, utile per avviarne il trasferimento nella zona dei Near Earth Objects. L'effetto Yarkovsky potrebbe essere determinante per assicurare un adeguato rifornimento di oggetti alla fascia dei NEO. Una conferma preliminare a questa idea può anche essere data dalle proprietà rotazionali dei NEO. Secondo i modelli dinamici i due canali principali di formazione dei NEO sono le risonanze ν_6 e $3:1$ (v. par. 4.4). La prima è quasi al bordo interno della fascia asteroidale, e può raccogliere solo asteroidi provenienti da una regione esterna, e quindi originariamente di semiasse maggiore più alto. La seconda invece è nel mezzo della fascia asteroidale. Le due risonanze hanno un ruolo approssimativamente uguale nella produzione di NEO. Arrivano però alla risonanza ν_6, per effetto Yarkovsky, quasi esclusivamente asteroidi retrogradi, mentre alla $3:1$ arrivano sia retrogradi, da semiassi più alti, sia progradi, dall'interno. L'effetto combinato delle due regioni permette di prevedere un eccesso di rotatori retrogradi (ossia che sono entrati nelle risonanze dall'esterno, se l'effetto Yarkovsky è stato determinante) tra i NEO, che in effetti si osserva, e per il quale i NEO differiscono dagli asteroidi di MB, più o meno equamente ripartiti nei due sensi di rotazione, anche se la distribuzione dei vettori di spin è lungi dall'essere isotropa, e che semmai presentano un eccesso di rotatori progradi.

4.9 Effetto YORP ed evoluzione dinamica delle famiglie

L'importanza dell'effetto YORP (Yarkovsky–O'Keefe–Radzievskii–Paddack) è divenuta evidente solo in anni molto recenti. Come si arguisce dalla Figura 4.4, l'effetto della radiazione può produrre, se l'oggetto ha una forma irregolare, un trasferimento di momento angolare.

In questo caso il ruolo determinante è quello della radiazione riflessa, non di quella riemessa successivamente. L'effetto YORP prevede appunto questo trasferimento, che potrebbe alterare significativamente le proprietà rotazionali di oggetti di dimensioni $\simeq 5km$ su una scala temporale di 10^8y, ed avere quindi conseguenze osservabili fino a oggetti di qualche decina di chilometri.

Nel modello di Rubincam (2000), primo rilevante lavoro sull'argomento, si calcola una forza esercitata su un elemento di superficie dA dai fotoni solari riflessi:

$$\vec{f} = -2F_S cos(\theta)\vec{N}/(3c) \tag{4.53}$$

dove F_S è la costante solare alla distanza dell'asteroide, $\vec{N}$ è il versore normale alla superficie e θ è l'angolo fra questa normale e la direzione del Sole (si veda anche l'Eq.4.44). In realtà questa forza viene parzialmente ridotta dall'assorbimento della radiazione solare. Questa forza produce un momento elementare:

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \mathbf{x} \vec{f} dA \tag{4.54}$$

che, integrato su tutta la superficie, può dare un risultato diverso da zero. In questo caso il momento angolare può cambiare nel tempo.

La quantità e le modalità di cambiamento dipendono dalla forma del corpo, la conoscenza della quale è necessaria per fare previsioni. In assenza di rilevanti irregolarità su grande scala, l'effetto è più debole e dipende anche da strutture di piccola scala. Ogni scala contribuisce in ugual misura, e l'effetto totale può cambiare (anche di segno) per irregolarità non osservabili da Terra e –al limite– anche dalle rare missioni spaziali.

L'effetto YORP causa una variazione della velocità angolare e dell'inclinazione dell'asse sul piano dell'orbita. Le equazioni di variazione sono:

$$\frac{d\omega}{dt} = \tau_z/C \tag{4.55}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \tau_\theta/(C\omega) \tag{4.56}$$

dove C è il momento d'inerzia. In presenza di irregolarità di forma evidenti vale spesso il modello di base (illustrato nel lavoro di Rubincam e successivamente definito di "tipo I"). Se l'asse è meno inclinato di $\simeq 55^0$ lo spin accelera, altrimenti decelera. L'inclinazione invece tende sempre a rendere l'asse perpendicolare al piano dell'orbita.

Mentre l'inclinazione dell'asse varia in modo uniforme, la velocità angolare tende prima ad aumentare, poi a diminuire. Al limite, per $\omega \simeq 0$ l'asse di rotazione può facilmente cambiare, e si può innescare un processo ciclico.

L'importanza dell'effetto YORP dipende criticamente dalle dimensioni del corpo (il tempo di variazione di ω scala come R^2), ed è stato possibile fare delle misure significative su un paio di NEO molto piccoli. L'effetto YORP potrebbe essere dominante nell'evoluzione delle proprietà rotazionali fino a qualche decina di chilometri. Per oggetti di famiglia non troppo grandi esso prevede una possibile clusterizzazione dei vettori di spin, della quale qualche riscontro è stato trovato in alcuni asteroidi della famiglia di Koronis (*"Slivan asteroids"*). In generale l'effetto può spiegare naturalmente la coda dei rotatori lenti, osservata, e mai convincentemente spiegata, nella distribuzione della velocità angolare degli asteroidi sotto qualche decina di chilometri.

Prevede anche un allontanamento degli assi di rotazione dal piano orbitale. Purtroppo sono pochissimi gli asteroidi di piccola dimensione per i quali sia noto il vettore di spin. Curiosamente si osserva una significativa carenza di assi di rotazione vicini al piano orbitale anche per oggetti molto più grandi, che non dovrebbero risentire dell'effetto YORP. La causa di questo fatto non è chiara.

Una possibile conseguenza indiretta delle'effetto YORP potrebbe essere anche l'addensamento al bordo, nello spazio degli elementi orbitali, dei membri piccoli di famiglia. In effetti per i corpi piccoli l'effetto YORP dovrebbe rapidamente rendere gli assi di rotazione normali al piano orbitale. L'effetto Yarkovsky, che dipende criticamente dalla direzione dell'asse, sposta a semiassi maggiori quelli progradi e a semiassi minori quelli retrogradi. Per oggetti di una data taglia (di solito i corpi più piccoli di una famiglia sono definiti dalle capacità di osservazione, ed essendo la distribuzione di massa di norma piccata verso i corpi più piccoli, quelli al limite della osservabilità sono i più numerosi) lo spostamento avviene con una velocità definita. Nello spazio degli elementi orbitali, e in particolare lungo il semiasse maggiore, la distribuzione si presenta quindi con due massimi per a verso il bordo inferiore e quello superiore della famiglia. Questo fatto viene osservato in diverse famiglie, e non potrebbe essere spiegato se la dispersione in asse maggiore fosse dovuta solo alle proprietà dinamiche iniziali o ad un effetto Yarkovsky attivo in presenza di assi di rotazione orientati a caso.

L'osservazione permette anche di impostare un modello interpretativo che produce una stima simultanea –probabilmente non troppo precisa– dell'età della famiglia (stimata dalla evoluzione dovuta all'effetto Yarkovsky/YORP) e della sua iniziale estensione nello spazio degli elementi orbitali.