Chapter 5

Evoluzione collisionale nel Sistema Solare.

5.1 Caratteristiche generali dell'evoluzione collisionale.

Le collisioni sono un processo del tutto generale e sempre presente nella storia del Sistema Solare, a partire dalle fasi di formazione (v. Cap.6). Esse sono rese inevitabili dal grandissimo numero di corpi presenti nel sistema, qualora si prendano in considerazione anche oggetti di massa non troppo grande. Essendo il numero di oggetti rapidamente crescente al decrescere della massa (o delle dimensioni) gran parte delle collisioni coinvolgeranno coppie di oggetti uno dei quali (per convenzione chiamato **proiettile**) sarà nettamente più piccolo dell'altro (il **bersaglio**). Nella (lunga) storia del Sistema Solare sono però avvenute anche collisioni tra corpi di dimensioni non troppo diverse.

Discuteremo le collisioni relative alle prime fasi del Sistema Solare nel Cap.6. Passato questo periodo, le collisioni sono di solito avvenute (e avvengono anche oggi) ad una notevole velocità relativa, che varia da qualche decina di chilometro al secondo (Sistema Solare interno) a diversi chilometri al secondo (zona degli asteroidi e dei pianeti giganti) a valori ulteriormente ridotti nella zona esterna ($1 - 2km/s$ nella zona dei TNO, ancora meno nella nube di Oort). A questa velocità relativa *all'infinito* si deve ovviamente aggiungere l'effetto di accelerazione dovuto alla mutua interazione gravitazionale dei due corpi in fase di avvicinamento. Questo effetto è ovviamente dominante quando almeno uno dei due corpi è di grandi dimensioni, e la sua velocità di fuga v_e eccede la velocità relativa all'infinito: un corpo non può ad esempio urtare la Terra a meno di $11,2km/s$ (naturalmente trascurando il possibile effetto di rallentamento dovuto all'atmosfera terrestre: effetto che è però importante solo se il proiettile è di moderate dimensioni: è insomma un meteorite).

Gli urti ad alta velocità comportano conseguenze di tipo diverso:

a) il fenomeno dell'erosione;

b) il fenomeno della craterizzazione;

c) il fenomeno della rottura catastrofica.

In un impatto il proiettile viene generalmente distrutto e quindi, in linea di principio, catturato dal bersaglio. Ciò dovrebbe provocare un aumento della massa di quest'ultimo.

In particolare quando la velocità d'impatto è grande, la materia espulsa dal cratere formato dall'impatto potrà però in parte sfuggire al pianeta bersaglio. Ciò rende possibile un bilancio negativo della massa complessiva. Il problema è estremamente complesso ed una sua discussione richiederebbe una analisi accurata dei vari effetti, dovuti alla composizione chimica ed alla struttura fisica della superficie planetaria, nonchè alla rotazione del bersaglio (i relativi effetti di *angular momentum drain* e di *splash* possono avere rilevanti conseguenze anche sulla rotazione successiva del bersaglio, causando una perdita di massa selezionata in base al momento angolare specifico, e quindi alla direzione di partenza). A titolo di esemplificazione semiqualitativa riportiamo la figura 5.1 che ci dice che tutti gli asteroidi (il più grande, Cerere, ha velocità di fuga inferiore a $1 km/s$; per gli asteroidi le tipiche velocità d'impatto sono di $5-6 km/s$) e anche la Luna (le velocità di impatto tipiche contro di essa sono superiori ai $20 km/s$) sono ancora oggi tipicamente oggetto di processi erosivi. Il discorso cambia quando si prendono in esame i pianeti, compresa la Terra.

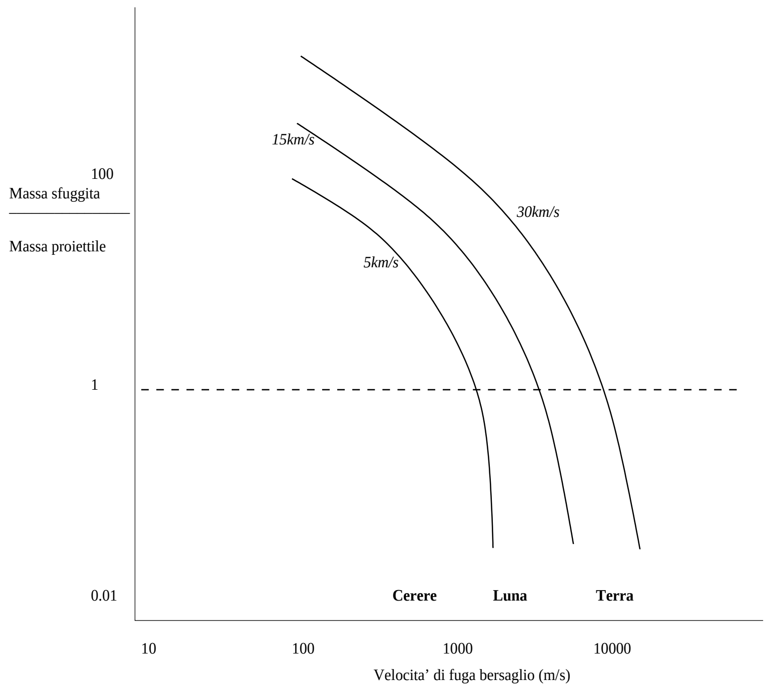

Figure 5.1: adattata da [6], relazione fra la massa sfuggita M_{esc} in unità di quella del proiettile M_p (la retta orizzontale di ordinata uguale a 1 rappresenta ovviamente il caso di equilibrio fra massa acquistata e massa perduta) e la velocità di fuga del bersaglio, per diverse curve corrispondenti a differenti velocità di impatto (la velocità di fuga è espressa in m/s, mentre le velocità di impatto sono date in km/s).

Si noti che :

$$v_e = \sqrt{2GM/r} = r\sqrt{8\pi G\rho/3} \tag{5.1}$$

ossia, per densitá dell'ordine di $2g/cm^3$, v_e, espressa in m/s, è più o meno uguale al raggio dell'oggetto espresso in chilometri.

I fenomeni descritti in b) e c) hanno conseguenze ancora più rilevanti. Un urto produce un cratere: ne sono evidenti le tracce in tutte le immagini di superfici solide planetarie inviateci dalle sonde negli ultimi anni, da Mercurio ai satelliti di Nettuno, tutti riccamente craterizzati, spesso al limite della "saturazione" (si ha saturazione quando un nuovo cratere ne ricopre necessariamente dei vecchi).

Se infine l'urto è troppo energetico può causare la completa distruzione del bersaglio (impatto catastrofico); per i corpi minori, in cui gli urti sono comunque erosivi (non comportano mai aumento di massa), $m_{fin} < m_{in}$.

Si può allora definire il parametro f_1, così definito:

$$f_1 = \frac{m_{frammento\, maggiore}}{m_{bersaglio}} \tag{5.2}$$

Ovviamente f_1 è sempre compreso fra 0 e 1, a meno che non si abbia riaccumulazione anche dei frammenti e del gas formato con il materiale costituente il proiettile. Un urto viene per convenzione definito "catastrofico" quando $f_1 < 0.5$. Altrimenti si parla di "craterizzazione". A rigore, la transizione non è del tutto ben definita, in quanto non si osservano crateri per i quali f_1 sia di poco superiore a 0.5; comunque dal punto di vista dell'energia richiesta la transizione fra collisioni che formano grossi crateri (per es. $f_1 \simeq 0.9$) e collisioni giá oltre la soglia catastrofica è piuttosto rapida, e il problema non ha, in pratica, rilevanti conseguenze. Nella definizione di questo parametro e della conseguente identificazione degli eventi catastrofici c'è una ulteriore potenziale ambiguità. Se un corpo viene frammentato finemente ma poi i frammenti si riaccumulano a causa della mutua gravitazione, abbiamo un evento catastrofico dal punto di vista della fase di frammentazione ma non catastrofico dal punto di vista della distribuzione di massa finale. Il problema non esiste quando si ha a che fare con impatti di laboratorio, ma diventa reale nel caso dei corpi planetari. A seconda del contesto può essere significativa l'una o l'altra accezione: per esempio per sapere la frazione degli asteroidi che sono "rubble piles" è ovviamente interessante il frazionamento iniziale (*"shattering"*); per sapere invece come evolve nel tempo la popolazione complessiva nei vari intervalli di massa, o per studiare la formazione di una famiglia dinamica per collisione, è rilevante la "dispersione" finale. Analogamente l'energia d'impatto per unità di massa del bersaglio (o di volume) Q necessaria per un evento catastrofico (analoga alla definizione di *impact strength*, v. nel seguito) potrà essere definita come Q_S se ci interessa lo shattering, e come Q_D se ci interessa la dispersione. I due valori, uguali per corpi piccoli, tenderanno a differire anche di parecchio per bersagli più grandi di un chilometro.

Anche le conseguenze dei fenomeni catastrofici sono osservabili direttamente in alcune immagini di satelliti (Iperione, satellite di Saturno, "macigno" irregolare di ben $400km$ di lunghezza, ne è forse l'esempio più celebre) e indirettamente fra gli asteroidi (famiglie dinamiche, v. nel seguito).

5.2 Fenomenologia sperimentale e astronomica (craterizzazione).

La prima domanda a cui si deve rispondere quando si parla della formazione di crateri da impatto è ovviamente: *Quanto è grande il proiettile che ha formato un cratere di date dimensioni?*

La domanda non ha una risposta immediata e generale, date le disparate condizioni che possono verificarsi. Una certa luce venne fatta, già molti anni fa, dagli esperimenti sui crateri fatti da esplosioni sperimentali (Lampson, 1950), spesso svolti a scopi militari e anche con l'utilizzo di testate nucleari, fino ai patti che segnarono la fine dei test nucleari in superficie (1963) e limitarono la potenza di quelli sotterranei (1974). Le dimensioni del cratere d scalano in modo semplice con l'energia E dell'esplosivo:

$$d \propto E^{1/3} \tag{5.3}$$

Numerose evidenze sperimentali (e considerazioni teoriche) permettono di stabilire l'*analogia impatti–esplosioni*. In sostanza in ambedue i casi ci troviamo con una grossa quantità di energia fortemente concentrata in una zona, e che successivamente si diffonde nel restante volume del bersaglio: la similarità dei processi fisici di base produce una fenomenologia per molti aspetti sovrapponibile, anche se una buona equivalenza si ha solo quando la carica esplosiva è collocata ad una profondità opportuna (che deve essere dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni del proiettile).

Questa analogia permette di introdurre, anche per i crateri, un sostanziale *energy–scaling*: infatti, avendo i crateri grosso modo una forma non troppo dipendente dalle dimensioni, la proporzionalità espressa dalla (5.3) equivale sostanzialmente ad una proporzionalità tra il volume V del cratere e l'energia d'impatto. Quest'ultima è d'altra parte proporzionale alla massa del proiettile per il quadrato della velocità di impatto; se velocità d'impatto e densità sono prese come costanti, ciò implica in sostanza che il volume del cratere è proporzionale al volume del proiettile, ossia che $d_c \propto l_p$ (l_p è il raggio medio del proiettile).

L'effetto della autogravitazione del bersaglio complica un po' la situazione. Il materiale scavato nel cratere deve essere sollevato dal fondo, e questo implica una variazione di energia potenziale:

$$\Delta U = m_{cratere}\, g \Delta h$$

dove Δh è proporzionale a d_c; ne consegue che $\Delta U \propto d_c^4$, laddove l'energia di frammentazione scala al più con la massa, ossia con d^3. Al limite, per crateri molto grandi, varrà allora la relazione:

$$d \propto \left(\frac{E}{\rho g}\right)^{1/4} \tag{5.4}$$

In effetti nei crateri formati dalle esplosioni nucleari si è trovata una dipendenza $d \propto E^{(1/3.4)}$ intermedia tra i due regimi normale e di gravità; se non ci si accontenta di un andamento approssimato il problema diventa un po' più complesso: e le caratteristiche del cratere dipendono in qualche misura anche dall'impulso trasferito, non solo dall'energia.

La figura ci mostra (L è un numero puro, proporzionale alle dimensioni del proiettile l_p) come, normalizzata opportunamente la dimensione del proiettile, per data composizione e struttura superficiale, la curva è univocamente definita e si ha la transizione dal *regime di strength* (linea orizzontale) al *regime di gravità* (linea inclinata). Curve diverse corrispondono a caratteristiche fisico-chimiche differenti, in particolare ad una superficie più o meno resistente.

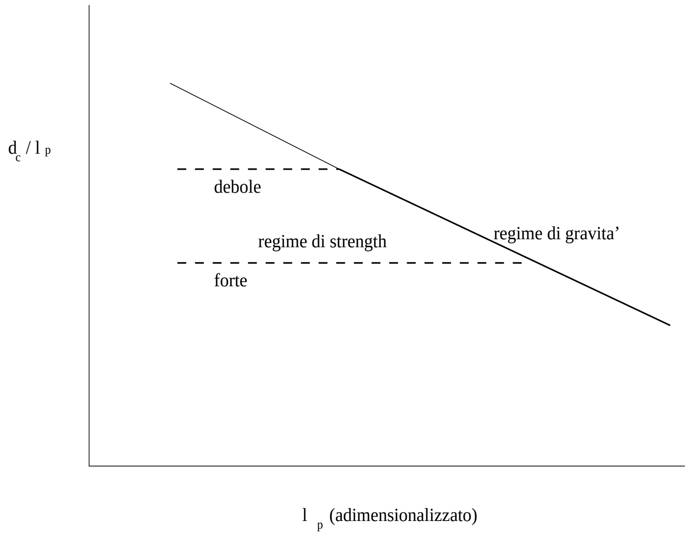

Figure 5.2: andamento di d_c/l_p in funzione della quantità adimensionale $L = gl_p/v_i^2$.

Ovviamente più la roccia è resistente più piccolo risulta il cratere; ma quando il proiettile è grande si entra in regime di gravità e si tende asintoticamente ad una curva valida per tutti i materiali, e decrescente, secondo le conseguenze della (5.4): $d \propto l^{(3/4)}$, ossia

$$\frac{d}{l} \propto l^{(-1/4)} \tag{5.5}$$

La transizione avviene a dimensioni che dipendono da gravità superficiale e velocità d'impatto.

5.3 La strength.

Lo studio dei fenomeni catastrofici é ancora piú complesso e richiede a maggior ragione l'acquisizione di alcuni strumenti teorici di base, come quelli che discuteremo nei prossimi paragrafi.

Possiamo introdurre un concetto di rilevante generalità, la **strength**. È sostanzialmente un modo di definire la minima condizione di sforzo (o di deformazione) che permette di attivare processi di rottura in un corpo. La resistenza di un corpo ad un tentativo di spezzarlo dipende dal modo in cui il tentativo viene fatto. Si identificano almeno tre casi qualitativamente diversi: la rottura per **compressione**, per **tensione** e per **impatto**. Lo sforzo ("stress") viene identificato da una grandezza che ha le dimensioni di una forza per unità di superficie (come la pressione) o, se si preferisce, di una energia per unità di volume (si vedano i par. 5.6/5.7). Nel caso di deformazioni "statiche" si definiscono allora la strength compressionale e la strength tensile, come gli sforzi limite per i quali si ha rottura in caso di compressione o di tensione.

La strength da impatto è invece forse meglio intesa come la densità volumica di energia che il bersaglio acquisisce con l'impatto.

Le tre quantità sono omogenee e quindi confrontabili anche quantitativamente, pur se espressioni di processi fisici completamente diversi. In generale la strength compressionale ha il valore più alto. Le due altre strength sono in prima istanza correlate con la prima: per esempio, per rompere un blocco di ferro occorre una maggiore compressione, tensione o energia specifica di impatto che per rompere un pezzo di tufo. Tuttavia i valori delle diverse strength, e i loro rapporti, sono anche influenzati in modo determinante dalle caratteristiche di struttura ed in particolare dalla preesistenza di superfici di frattura, discontinuità, porosità ecc.. Per esempio un corpo prefratturato, con le parti riaccostate, ha una strength compressionale e da impatto non troppo diversa da quelle del corpo intatto, ed una strength tensile, ovviamente, vicina a zero. La presenza di porosità, mentre rende il corpo più debole a sollecitazioni statiche, rende più difficile la propagazione di onde d'urto e simili, alla base del processo di rottura per impatto. Per strutture complesse condizionate dalla storia precedente (come sono peraltro quelle dei corpi di interesse astrofisico) la valutazione della strength è quindi estremamente difficile, e può essere stimata solo come parametro empirico, mediante esperimenti di laboratorio o simulazioni idrodinamiche dei processi.

5.3.1 Collisioni catastrofiche.

Gli esperimenti di laboratorio, volti a simulare la rottura per impatto di corpi solidi, suggeriscono anche per i processi catastrofici un approssimato *energy–scaling*. Il parametro f_1, sopra definito, dipende in buona misura dal rapporto fra l'energia di impatto e la massa del bersaglio, e quindi la definizione di *impact strength* è effettivamente utile per prevedere gli esiti di un evento collisionale. Vari autori suggeriscono relazioni un po' diverse fra di loro; una tipica (ottenuta dal gruppo giapponese di A. Fujiwara negli anni '70) ha la forma:

$$f_1 = 0.5 \left(\frac{SM}{\rho E/2} \right)^{1.24} \tag{5.6}$$

dove E è l'energia d'impatto, il fattore 2 a dividerla tiene conto del fatto che di essa tipicamente metà viene devoluta a distruggere il proiettile, e solo metà viene utilizzata sul bersaglio, M è la massa del bersaglio, ρ è la densità dello stesso, ed il parametro S è la impact strength, che corrisponde, per definizione, alla densità volumica di energia (beninteso, il volume è quello del corpo bersaglio) che causa una frammentazione catastrofica ($f_1 \leq 0.5$). Per rocce di tipo basaltico (o simili, spesso usate per simulare i processi di tipo asteroidale), $S \simeq 10^7\ erg/cm^3$; ciò, per le tipiche velocità di impatto di 5 km/s, implica un rapporto di massa proiettile-bersaglio dell'ordine di 10^{-4}.

Per essere più esatti, le conseguenze di un impatto dipendono anche dalla velocità della collisione. La relazione precedente, e molta della letteratura rilevante per le applicazioni astrofisiche, fanno l'ipotesi di collisione "a ipervelocità" (o supersonica), avvenuta cioè ad una velocità relativa superiore alla velocità del suono nel materiale. Per rocce basaltiche la velocità del suono per onde longitudinali (si veda il par. 5.7) è di circa $3.5 km/s$. Le collisioni fra asteroidi avvengono di norma a velocità relativa più alta. Collisioni subsoniche producono ancora frammentazione del bersaglio, ma con modalità diverse.

Per collisioni a ipervelocità di laboratorio la frammentazione segue un modello abbastanza definito. Nella regione di impatto si ha una frammentazione molto fine, e i frammenti vengono espulsi a velocità molto alte. Le dimensioni dei frammenti aumentano, e le velocità diminuiscono, andando dal punto di impatto verso la regione "antipodale". Il frammento più grosso è, a seconda dei casi, un "core" interno o spostato verso la regione antipodale.

Le caratteristiche del frammento superstite più grande non esauriscono evidentemente il problema. I frammenti minori si distribuiscono a varie masse e velocità. La distribuzione di massa è spesso assimilata (grossolanamente) ad una legge di potenza:

$$N(> m) \propto m^{-q} \tag{5.7}$$

dove $N(> m)$ è il numero di oggetti di massa superiore ad m (distribuzione di *massa cumulativa*). La distribuzione di massa "differenziale" $dN = N(m)dm$ (simile a quella discussa nel Cap.3) può essere ricavata dalla precedente, con un esponente $q' = q + 1$. Dagli esperimenti vengono fuori valori di best–fit diversi, ma un valore $q' \simeq 1.8$ può essere preso come indicativo. La legge di potenza, comunque, può difficilmente essere usata per rappresentare sempre la distribuzione di massa dei frammenti più grandi. Come discusso in letteratura, esiste un banale vincolo "geometrico": per esempio, se si fa (tanto per discutere il problema in termini elementari) l'ipotesi di avere frammenti cubici da un parent body anch'esso cubico, se il frammento più grosso ha uno spigolo 2/3 di quello del parent body (e quindi una massa inferiore al 30%), nel resto del corpo non si riesce a creare un secondo frammento cubico con spigolo maggiore di 1/3 e quindi massa di meno del 4%. Più il primo frammento è grande più è il "gap" nelle dimensioni con il secondo e i successivi. L'effetto si osserva non solo nei frammenti prodotti negli esperimenti di laboratorio, ma anche nella distribuzione di massa delle famiglie di asteroidi, anche se in questo caso il processo di formazione dei corpi che osserviamo è più complesso, comprendendo anche una significativa (o spesso dominante) riaccumulazione.

Anche la distribuzione delle velocità è tipicamente approssimabile con una legge di potenza:

$$f(> v) = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{-k} \tag{5.8}$$

dove $f(> v)$ è la frazione di massa che sfugge a velocità eccedente v. Le (5.7) e (5.8) assieme suggeriscono anche la presenza di una relazione massa-velocità. I frammenti più grossi sono di solito più lenti. La relazione massa-velocità e la (5.8) determinano, per frammenti di scala planetaria, per i quali la forza di autogravitazione, come detto, recita un ruolo importante, le caratteristiche dell'eventuale processo di riaccumulazione successiva al frazionamento.

Il valore di v_0 (eq. 5.8) è collegato alla energia cinetica disponibile per i frammenti osservabili; essa è definita in funzione dell'energia d'impatto mediante il parametro

$$F_{ke} = \frac{E_{cin.\,ejecta}}{E_{impatto}} \tag{5.9}$$

Tale parametro, negli esperimenti di laboratorio, cresce con l'energia specifica di impatto E/M secondo una legge di potenza, da valori dell'ordine di 0.01 per impatti appena catastrofici a valori di 0.1 o più per impatti totalmente distruttivi (in cui la massa del frammento più grande diventa di pochi millesimi di quella del bersaglio).

I valori di S e F_{ke} sono essenziali nel determinare l'esito di un impatto catastrofico.

Notiamo che sia su F_{ke} sia su S esistono grossi margini di incertezza. S è legata alla resistenza compressionale e tensile per corpi monolitici, mentre è di difficile previsione teorica per oggetti porosi o con una struttura interna complessa (prefratturati, agglomerati ecc.); inoltre è stata suggerita (anche da risultati sperimentali) la dipendenza da una eventuale pressione P cui il corpo sia soggetto (corpi compressi risultano più resistenti, e questo potrebbe essere di grande importanza per corpi di dimensioni ragguardevoli, le cui zone centrali sono compresse per l'effetto della gravità); essendo la pressione P e S due grandezze dimensionalmente omogenee, la strength di un corpo compresso può essere ottenuta con una combinazione lineare delle stesse. Si noti però che, sulla base di considerazioni teoriche che saranno spiegate nel seguito, corpi di dimensioni maggiori dovrebbero essere, come valore di base di S, meno resistenti. Partire dagli esperimenti di laboratorio per interpretare che cosa è successo nelle collisioni planetarie è quindi un percorso tortuoso e ricco di difficoltà, e diventano necessarie, come discuteremo meglio più oltre, simulazioni idrodinamiche. Si ricordi infine che, come già detto nel par. 5.1, la definizione di evento catastrofico e la relativa interpretazione delle osservazioni astronomiche relative alle famiglie dinamiche deve tener conto della distinzione e della differenza fra la distribuzione di massa iniziale dei frammenti e quella dei corpi osservati dopo la eventuale riaccumulazione.

5.4 Fenomenologia: effetti osservabili delle collisioni catastrofiche.

5.4.1 Riaccumulazione di satelliti e asteroidi.

Le osservazioni astronomiche, fatte sugli asteroidi, introducono forti vincoli ai valori di S e F_{ke} per oggetti di dimensioni planetarie.

Un primo interessante vincolo viene dalle osservazioni relative alle proprietà rotazionali degli asteroidi. Ricordiamo la discussione del Cap.3. Per tutti gli asteroidi più grandi di circa $150m$ di diametro (naturalmente il campione osservativo fino a questa scala è ben lungi dall'essere completo) non si osservano praticamente asteroidi che ruotino in meno di $\sim 2h$. Tale risultato è inspiegabile se si pensa ad asteroidi di struttura monolitica. Diventa invece comprensibile se si pensa ad asteroidi che l'evoluzione collisionale precedente abbia trasformato in **rubble piles** ossia in agglomerati di componenti solide più piccole riaccumulate dalla mutua gravitazione. Se gli asteroidi più grandi di $150m$ sono oggetti riaccumulati, il loro periodo di rotazione è inferiormente limitato da quello che causa una fissione o almeno una perdita di materiale dalla zona equatoriale. Il limite di due ore si ottiene per valori di densità abbastanza realistici. L'ipotesi che gli asteroidi siano in generale oggetti riaccumulati richiede che la loro rottura collisionale sia piuttosto facile (bassa impact strength S) e che la frammentazione porti alla formazione di frammenti in moto iniziale con una piccola velocità relativa, tale da consentire una parziale riaccumulazione (basso valore anche di F_{ke}).

Tra gli oggetti di raggio più grande (decine o anche 100 km o più; forse il campione più interessante) numerose sono le risultanze di eventi collisionali:

i) Le *famiglie dinamiche*, introdotte nel Cap. 3, e su cui torneremo nel prossimo paragrafo.

ii) La presenza di un certo numero di asteroidi doppi, la cui origine è spesso collegata con i processi di formazione delle famiglie. I progressi osservativi degli ultimi anni, dovuti sia alle esplorazioni in loco mediante sonde spaziali sia a nuove sofisticate tecniche di indagine remota (radar, speckle interferometry, ecc.) stanno molto migliorando le nostre conoscenze sulla forma degli asteroidi e portando anche alla scoperta relativamente frequente di strutture binarie.

iii) i cosiddetti "LASPA", ossia asteroidi di forma piuttosto allungata (Large Amplitude) e velocemente rotanti (Short Period); alcuni di tali oggetti, di ragguardevoli dimensioni, sono stati interpretati come simili a ellissoidi triassiali di Jacobi; ciò implica ragionevolmente un evento collisionale (presumibilmente unico) che abbia trasferito una grossa quantità di momento angolare, fratturato buona parte del corpo, in modo da trasformarlo, in sostanza, in un cumulo di sassi (a parte, magari, un nucleo centrale intatto), e lanciato i frammenti a velocità non eccessivamente alta, in modo da consentirne una ricattura (almeno parziale) da parte del frammento più grosso. Un processo di questo tipo limita superiormente $F_{ke} < 2v_e/v_i$, dove v_e è la velocità di fuga del bersaglio, e v_i è la velocità d'impatto. Per oggetti di queste dimensioni ciò implica un limite superiore di F_{ke} tipicamente di 0.05, o poco più, in accordo con le stime più recenti relative alla formazione delle famiglie.

5.4.2 Problematiche relative alle famiglie dinamiche di asteroidi.

Abbiamo già lungamente parlato delle famiglie dinamiche, gruppi di oggetti con parametri orbitali (propri) a, e, i molto simili, ai quali si attribuisce una origine comune, quali prodotti finali di un unico processo catastrofico. Fino a una ventina di anni fa si riteneva che le proprietà osservate delle famiglie fossero dovute esclusivamente alle loro caratteristiche di formazione. Se fosse così, l'esistenza delle famiglie e le tipiche caratteristiche richiederebbero valori piuttosto alti sia di F_{ke} sia di S, difficilmente spiegabili da un punto di vista teorico. Dopo che la rilevanza dell'effetto Yarkovsky è stata messa in evidenza, e hanno cominciato ad essere sviluppate sofisticate simulazioni idrodinamiche dei processi di impatto catastrofico, un nuovo scenario è stato sviluppato, coerente con valori bassi dei suddetti parametri. In questo scenario la collisione catastrofica crea una fine frammentazione dei corpi collidenti, creando per lo più frammenti di piccole dimensioni. La famiglia diventerebbe astronomicamente osservabile a causa di una riaccumulazione estesa dei frammenti, dovuta alla mutua gravitazione, in grado di creare un gruppo consistente di oggetti più grandi (una dimensione minima $5 - 10km$ di diametro è necessaria per una osservazione sistematica e ragionevolmente completa degli oggetti). I modelli teorici, confortati dalle simulazioni idrodinamiche, prevedono che l'energia specifica minima necessaria per frammentare un corpo di grosse dimensioni sia inferiore (anche di uno o due ordini di grandezza) rispetto a quella richiesta per i tipici eventi studiati in laboratorio (dove anche i bersagli sono di solito grandi non molti centimetri). Il punto sarà discusso in dettaglio nel par. 5.8.

Nelle simulazioni idrodinamiche la frammentazione arriva fino al limite di risoluzione (non troppo alta: per un bersaglio di $100km$ elementi di $1km$ richiedono una simulazione con 10^6 "particelle", già piuttosto "pesante" come tempi di calcolo). L'esistenza di oggetti monolitici sulla scala dei cento metri fa pensare che questo possa essere il tipico livello di frammentazione reale. I frammenti, così creati, vengono espulsi con diverse velocità e in diverse direzioni. Il "campo di velocità" così definito deve essere però compatibile con una estesa riaccumulazione (altrimenti i frammenti originari non sarebbero osservabili). Ciò richiede che di norma le velocità non siano troppo alte e che la geometria del campo permetta la riaccumulazione su **molti** oggetti. La prima richiesta, messa a confronto con i Δv stimati dalla differenza degli elementi orbitali (v. Cap.4), implica l'esistenza di processi successivi di diffusione; l'effetto Yarkovsky sembra essere la spiegazione principale, anche se non vanno trascurati gli effetti –più selettivi ma, quando si applicano, non meno rilevanti– di risonanze e simili. Il secondo punto è più complesso. Non è tuttora chiaro come sia possibile avere un processo di riaccumulazione che permetta di formare molti corpi di rilevanti dimensioni (ossia osservabili da terra). Campi di velocità semplici portano sistematicamente a riaccumulare gran parte della materia su pochi corpi, formando famiglie osservabili formate da un numero molto limitato di oggetti.

L'importanza dei processi di riaccumulazione è comunque fuori questione, come provato anche dalla frequenza dei sistemi binari (probabilmente ne è stata scoperta solo una piccola parte, per limiti osservativi). La formazione di coppie legate è, per così dire, un effetto collaterale del processo di riaccumulazione che definisce la distribuzione di massa dei membri di famiglia.

Dando per acquisito questo scenario, si apre la via per una stima delle caratteristiche di formazione e dell'età di numerose famiglie, come già discusso nel Cap.4. Le caratteristiche osservate della famiglia sono confrontate con un modello di base, in cui una struttura iniziale viene ad evolvere in base all'effetto Yarkovsky, tenendo anche conto dell'allineamento degli assi di rotazione conseguente all'effetto YORP. La ricerca di un "best fit" fra la famiglia osservata e il modello permette di definire alcuni parametri. I più interessanti sono certamente la velocità quadratica media iniziale e l'età. Data la complessità del problema, e l'esistenza di alcuni aspetti non completamente chiariti, questi risultati debbono ancora essere ritenuti come preliminari. Il metodo si applica bene soprattutto a famiglie medio–piccole, che risultano anche relativamente giovani, con età che vanno fino a qualche centinaio di milioni di anni.

5.5 Impatti con la Terra: rischi e strategie di difesa.

Un corpo di origine planetaria, sopravvissuto al passaggio nell'atmosfera, che colpisce la Terra, dà localmente origine ad un cratere d'impatto. Se il proiettile è molto grande le conseguenze non sono limitate ad un ambito locale, ma possono coinvolgere il clima e l'ecosistema e, al limite, compromettere la sopravvivenza delle specie viventi. L'effetto di tali impatti è stato studiato mediante simulazioni teoriche, analoghe a quelle utilizzate per prevedere le conseguenze a lungo termine di una guerra nucleare. L'energia trasferita dall'impatto $E_{imp} = m_p v_{imp}^2/2$ è il parametro determinante. Un proiettile di un chilometro di diametro (data la popolazione attuale dei Near Earth Asteroids, ne è previsto l'arrivo a intervalli di poco più brevi di un milione di anni), ha una energia d'impatto dell'ordine di 50000 Megaton (un Megaton corrisponde all'energia liberata da un milione di tonnellate di tritolo, $\simeq 4\ 10^{22} erg$). L'impatto di un corpo di $2-3$ chilometri ($E \simeq 10^6 Megaton$) è sufficiente per causare una catastrofe globale (così definita, per convenzione, quando il numero di vittime attese supera il 25% del genere umano). Ci sono diversi effetti che agiscono anche a grande distanza dalla regione d'impatto; tra di essi sono in particolare rilevanti le alterazioni climatiche (simili al cosiddetto inverno nucleare), dovute al cambiamento di proprietà dell'atmosfera (per esempio a causa del pulviscolo sollevato; si ricordi il celebre "anno senza estate" 1816, dovuto alla eruzione del vulcano Tambora in Indonesia).

La rapida estinzione di molte specie viventi, tra cui i dinosauri, al passaggio (KT) dal Cretaceo al Terziario (circa 65 milioni di anni fa) è stata collegata con un impatto asteroidale, in cui il proiettile aveva dimensioni intorno alla decina di chilometri; sono state anche proposti il possibile cratere (Chicxulub, nello Yucatan, in parte sottomarino) ed un possibile effetto collaterale (una abbondanza anomala di iridio in strati geologici databili all'epoca della transizione KT). Un evento di questa portata avviene in media ogni 100 milioni di anni. È possibile che anche altre estinzioni di massa –un evento ripetutosi diverse volte nella storia della vita sulla Terra– possano avere avuto la stessa causa, anche se non c'è su questo un accordo generale (sono stati proposti anche altre possibili cause, legate per esempio a intensi processi vulcanici).

Le potenziali "catastrofi globali", definite in precedenza, sono forse cento volte piú frequenti, ed eventi di minore portata, ma comunque estremamente pericolosi, come quello, probabilmente dovuto ad un corpo di origine cometaria, che causò, nel 1908, estesi danni nella zona, fortunatamente disabitata, di Tunguska in Siberia, possono aver luogo anche una volta ogni cento anni.

Sul piano teorico la probabilità, per ogni persona, di restare vittima di un impatto asteroidale, è confrontabile con quella di morire in un incidente aereo (secondo le stime piú recenti, leggermente inferiore (Harris, 2006)). L'interesse anche pratico alla conoscenza dei NEA/NEO ha permesso di finanziarne uno studio sistematico, secondo un programma, promosso in particolare dagli Stati Uniti, che prevedeva il raggiungimento di un "diametro di completezza" (almeno al 90%) di $1km$ entro il 2008. Anche se nei programmi ci sono stati alcuni ritardi, indubbiamente moltissimi oggetti sono stati individuati. I NEA scoperti vengono studiati, per identificare quelli potenzialmente pericolosi. La pericolosità effettiva dipende dalle dimensioni e dalla probabilità di impatto (entro qualche decennio; eventi più lontani nel tempo sono di più incerta previsione). La scala di pericolosità viene detta *Torino*, dal luogo del convegno in cui venne definita: a valori alti nella scala corrispondono oggetti grossi con alte probabilità di collisione. La identificazione e lo studio di un asteroide destinato ad una futura collisione con la Terra permettono, in linea di principio, l'elaborazione di una strategia di "mitigazione", basata non sulla distruzione dell'asteroide (che richiederebbe una quantità enorme di energia), ma sulla sua deviazione. L'intervento richiede, per essere tecnologicamente fattibile, una previsione anticipata, spesso di qualche decennio; l'entità della correzione da apportare al moto (e quindi l'onerosità dell'intervento) aumenta in media inversamente alla distanza temporale, ma in alcuni casi, per oggetti con proprietà dinamiche particolari, è caratterizzata da andamenti "a soglia". La strategia di mitigazione richiede anche una buona conoscenza delle caratteristiche fisiche dell'asteroide. Non è la stessa cosa deviare un monolito o una sorta di "grissino" (la prima volta che l'idea delle rubble pile è stata espressa, questo era il termine usato, e il luogo era un numero di **Paperino**!).

5.6 Strumenti teorici: la legge di Hooke.

Un corpo soggetto ad uno sforzo si deforma; la deformazione, se non è troppo grande, è reversibile ("elastica"). Discutiamo, sulla falsariga della trattazione sviluppata in [8], la terminologia e le leggi valide per il caso elastico. La terminologia sarà estendibile anche ai più complessi processi anelastici o impulsivi. Possiamo definire la deformazione come lo spostamento dei punti che compongono il corpo:

$$\epsilon_i = x'_i - x_i$$

La separazione di due punti infinitamente vicini si trasforma secondo l'espressione $dx'_i = dx_i + d\epsilon_i$ ed un elemento di lunghezza infinitesimo dl diviene:

$$dl'^2 = dx'_i dx'_i = (dx_i + d\epsilon_i)(dx_i + d\epsilon_i) = dx_i dx_i + d\epsilon_i d\epsilon_i + 2d\epsilon_i dx_i$$

Ponendo

$$d\epsilon_i = \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} dx_k$$

si ha finalmente:

$$\begin{aligned} dl'^2 &= dl^2 + 2\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k}\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_l} dx_k dx_l = \\ &= dl^2 + \left(\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x_i}\right) dx_i dx_k + \frac{\partial \epsilon_l}{\partial x_k}\frac{\partial \epsilon_l}{\partial x_i} dx_i dx_k \end{aligned} \tag{5.10}$$

e possiamo quindi definire il **tensore delle deformazioni** (*strain tensor*):

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \epsilon_l}{\partial x_i}\frac{\partial \epsilon_l}{\partial x_k}\right) \tag{5.11}$$

Si noti che il terzo termine della equazione è quadratico nella deformazione; se essa è di moderata entità relativa questo termine può essere trascurato e il tensore ridursi alla somma dei primi due termini. Useremo questa semplificazione più oltre. La (5.10) diviene:

$$dl'^2 = dl^2 + 2\epsilon_{ik} dx_i dx_k \tag{5.12}$$

Il tensore è simmetrico e può quindi essere diagonalizzato mediante una opportuna trasformazione di assi; notiamo che la deformazione (allungamento o accorciamento) relativa lungo la direzione di uno degli assi principali di ϵ può essere espressa come

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2\epsilon^{(i)}} - 1$$

che è $\simeq \epsilon^{(i)}$ al primo ordine; la variazione di volume sarà quindi:

$$dV' \simeq dV(1 + \epsilon_{ii}) = dV[1 + Tr(\epsilon)] \tag{5.13}$$

La traccia del tensore definisce quindi la variazione relativa del volume.

La deformazione di un corpo è in generale dovuta alla presenza di sforzi. Essi potranno essere descritti mediante il **tensore degli sforzi** (o *stress tensor*) legato alle componenti della forza F_i agente su un elemento di volume (densità di forza):

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \tag{5.14}$$

Per una compressione uniforme

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} \tag{5.15}$$

(con δ_{ik} simbolo di Kronecker). L'equazione dell'equilibrio idrostatico ha la forma:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0 \tag{5.16}$$

dove ovviamente ρ è la densità e g_i sono le componenti della accelerazione di gravità.

Per un corpo isolato la condizione di equilibrio è ovviamente:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{5.17}$$

Notiamo che σ ha le dimensioni di una forza/superficie, ossia di una pressione, o anche di una energia/volume (le stesse del parametro S definito nel paragrafo precedente).

Il lavoro fatto in seguito ad una deformazione può essere così calcolato:

$$\int \delta W dV = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta \epsilon_i dV$$

integrando per parti e notando che l'integrale di superficie si annulla:

$$\int \delta W dV = \oint \sigma_{ik} \delta \epsilon_i df_k - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta \epsilon_i}{\partial x_k} dV =$$

$$= \frac{-1}{2} \int \sigma_{ik} \left(\frac{\partial \delta \epsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta \epsilon_k}{\partial x_i} \right) dV = - \int \sigma_{ik} \delta \epsilon_{ik} dV \tag{5.18}$$

(notiamo qui che del tensore di deformazione è stato omesso il termine quadratico, trascurabile per deformazioni non troppo grandi). La (5.18) permette anche di definire i differenziali di energia ed energia libera relative a trasformazioni termodinamiche di corpi solidi:

$$dE = TdS + \sigma_{ik} d\epsilon_{ik} \tag{5.19}$$

$$dF = -SdT + \sigma_{ik} d\epsilon_{ik} \tag{5.20}$$

ossia:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial E}{\partial \epsilon_{ik}} \right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ik}} \right)_T \tag{5.21}$$

Per deformazioni non troppo grandi rispetto all'equilibrio le funzioni termodinamiche, come l'energia libera, possono essere sviluppate in serie di ϵ. Il primo termine importante sarà ovviamente quello quadratico (essendo lo sviluppo fatto intorno ad una posizione di equilibrio il termine lineare deve essere nullo). In generale lo sviluppo avrà la forma:

$$F = F_0 + \frac{\lambda_{iklm}}{2} \epsilon_{ik} \epsilon_{lm} \tag{5.22}$$

dove il tensore di rango quattro λ sarà determinato dalla struttura cristallina del materiale. Se invece il materiale è amorfo, e ha caratteristiche di isotropia, come nei casi che più ci interessano, lo sviluppo in serie di F dovrà comprendere solo delle grandezze scalari costruite con il tensore degli sforzi. Gli unici due scalari indipendenti ottenibili da un tensore di rango 2 sono la traccia (ϵ_{ii}) e la norma ($\epsilon_{ik}\epsilon_{ik}$).

Avremo quindi:

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2}\epsilon_{ii}^2 + \mu\epsilon_{ik}\epsilon_{ik} \tag{5.23}$$

dove i due parametri λ e μ prendono il nome di *coefficienti di Lamè*.

Il significato fisico può essere reso più trasparente trasformando il tensore nella somma di due tensori distinti, uno a traccia nulla ed uno diagonale (ricordiamo il legame della traccia con la variazione di volume):

$$\epsilon_{ik} = \left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll} = A_{ik} + B_{ik} \tag{5.24}$$

Nello sviluppo dell'energia libera i prodotti misti si cancellano (essendo nulla la traccia di A), così come il contributo di A al termine con il coefficiente μ: restano solo tre termini:

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2}B_{ii}^2 + \mu\left(A_{ik}A_{ik} + B_{ik}B_{ik}\right) \tag{5.25}$$

e definendo:

$$K = \lambda + 2/3\mu$$

e raccogliendo, si ottiene infine:

$$F = F_0 + \mu\left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}\right)^2 + \frac{K}{2}\epsilon_{ll}^2 \tag{5.26}$$

Il coefficiente K prende il nome di **modulo di compressione**, mentre μ è legato alle deformazioni **di taglio**.

Differenziando F, e ricordando che la contrazione di un tensore a traccia nulla sul tensore identità dà ovviamente zero, si ottiene:

$$\begin{aligned} dF &= K\epsilon_{ll}d\epsilon_{ll} + 2\mu\left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}\right)d\left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}\right) = \\ &= K\epsilon_{ll}d\epsilon_{ll} + 2\mu\left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}\right)d\epsilon_{ik} = \\ &= \left[K\epsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}\right)\right]d\epsilon_{ik} \end{aligned} \tag{5.27}$$

da cui ricordando la (5.20) è possibile ritrovare il tensore degli sforzi:

$$\sigma_{ik} = K\delta_{ik}\epsilon_{ll} + 2\mu\left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}\right) \tag{5.28}$$

L'equazione precedente può anche essere facilmente invertita, dando la **legge di Hooke**:

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right) \tag{5.29}$$

che collega la deformazione con lo sforzo applicato. Notiamo che, per esempio, nel caso di compressione uniforme, dalla (5.29) avremo:

$$\epsilon_{ik} = -\frac{P}{3K}\delta_{ik} \tag{5.30}$$

Notiamo che in questo caso la traccia di ϵ, che dà la variazione relativa di volume, è uguale a $-P/K$, così giustificando il nome dato a K.

Invece, per esempio, se si ha una compressione unidimensionale, per cui $\sigma_{11} = -P$ e tutte le altre componenti sono nulle, avremo:

$$\epsilon_{11} = -\frac{P}{9K} - \frac{1}{2\mu}\left(-P + \frac{P}{3}\right) = -\frac{P}{9}\left(\frac{1}{K} + \frac{3}{\mu}\right) \tag{5.31}$$

mentre

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{P}{9}\left(\frac{1}{K} - \frac{3}{2\mu}\right) \tag{5.32}$$

e, ovviamente, se i e k sono diversi, $\epsilon_{ik} = 0$.

L'equazione (5.28) può anche essere scritta in forma vettoriale, ritornando alla definizione del vettore di componenti ϵ_i; per piccole deformazioni:

$$\epsilon_{ik} = 1/2(\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x_i}) \tag{5.33}$$

L'equazione di equilibrio in assenza di forze esterne (5,17), può essere trasformata, in base alla (5,28), ricordando che:

$$\frac{\partial \epsilon_{ll}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \epsilon_l}{\partial x_i \partial x_l} \tag{5.34}$$

e che:

$$\frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \epsilon_i}{2\partial {x_k}^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_l}{2\partial x_l \partial x_i} \tag{5.35}$$

(si somma sempre sugli indici l). Si ha quindi:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = [K + \frac{1}{3}\mu]\frac{\partial^2 \epsilon_l}{\partial x_i \partial x_l} + \mu\frac{\partial^2 \epsilon_i}{\partial x_k^2} = 0 \tag{5.36}$$

In termini dei consueti operatori vettoriali gradiente, divergenza e Laplaciano si può anche scrivere:

$$[K + \frac{1}{3}\mu]\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{\epsilon}] + \mu\Delta\vec{\epsilon} = 0 \tag{5.37}$$

5.7 Strumenti di base: propagazione delle onde nei solidi.

La propagazione delle onde di pressione nei solidi presenta caratteristiche diverse e più complesse rispetto alla propagazione di onde nei fluidi; si possono avere onde sia longitudinali (nelle quali cioè la direzione di propagazione e quella della perturbazione, compressione o depressione, coincidono) sia trasversali, e le rispettive velocità di propagazione sono diverse. Inoltre le onde si differenziano per intensità, in elastiche, plastiche e d'urto.

Per quanto riguarda le onde elastiche (che non provocano deformazioni permanenti, ed in particolare rottura) le equazioni fondamentali possono essere ottenute dalla (5.37).

Infatti se un corpo viene deformato e questo induce una forza di richiamo elastica, le equazioni del moto prendono la forma:

$$\rho\ddot{\vec{\epsilon}} = [K + \frac{1}{3}\mu]\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{\epsilon}] + \mu\Delta\vec{\epsilon} \tag{5.38}$$

L'equazione può essere scritta nella forma:

$$\ddot{\vec{\epsilon}} = (c_l^2 - c_t^2)\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{\epsilon}] + c_t^2\Delta\vec{\epsilon} \tag{5.39}$$

dove $c_l^2 = (K + 4\mu/3)/\rho$ e $c_t^2 = \mu/\rho$. Il vettore ϵ può essere rappresentato dalla somma di due termini, uno a divergenza nulla ϵ_t e l'altro a rotore nullo ϵ_l:

$$\ddot{\vec{\epsilon_l}} + \ddot{\vec{\epsilon_t}} = (c_l^2 - c_t^2)\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{\epsilon_l}] + c_t^2\Delta(\vec{\epsilon_l} + \vec{\epsilon_t}) \tag{5.40}$$

Applicando l'operatore divergenza ad ambo i membri dell'equazione si ha:

$$\vec{\nabla}\ddot{\vec{\epsilon_l}} = (c_l^2 - c_t^2)\Delta\vec{\nabla} \cdot \vec{\epsilon_l}] + c_t^2\Delta\vec{\nabla} \cdot \vec{\epsilon_l} = c_l^2\Delta\vec{\nabla} \cdot \vec{\epsilon_l} \tag{5.41}$$

e, ricordando che ϵ_l ha anche rotore nullo, si ottiene:

$$\frac{\partial^2\vec{\epsilon_l}}{\partial t^2} - c_l^2\Delta\vec{\epsilon_l} = 0. \tag{5.42}$$

Applicando invece l'operatore rotore si trova, con analoghe considerazioni, una analoga equazione:

$$\frac{\partial^2\vec{\epsilon_t}}{\partial t^2} - c_l^2\Delta\vec{\epsilon_t} = 0. \tag{5.43}$$

Analoghe equazioni valgono anche per la pressione o la velocità u_i. Le quantità c sono le velocità di propagazione; per onde longitudinali c_l vale quindi:

$$c_l = \sqrt{\frac{\left(K + 4\frac{\mu}{3}\right)}{\rho}} \tag{5.44}$$

e per onde trasversali si ha invece:

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{5.45}$$

La velocità del suono per onde trasversali è minore (di circa $1km/s$ per rocce basaltiche).Lo stress ha componenti diverse, sia longitudinali, sia trasversali, sia fuori diagonale (*shear stress)*; notiamo che per una onda longitudinale, in cui la deformazione è unidirezionale, si hanno solo componenti di stress sulla diagonale. Longitudinalmente lo stress sarà:

$$\sigma_l = -\rho u_l c_l \tag{5.46}$$

dove u_l è la velocità tipica delle particelle perturbate dall'onda.

Notiamo che la (5.46) può essere qualitativamente capita con il seguente ragionamento: se deriviamo rispetto a x (direzione di propagazione dell'onda) otteniamo a destra

$$-\rho c_l \frac{\partial u_l}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x};$$

ma

$$c_l \frac{\partial t}{\partial x} = 1$$

e riarrangiando si ottiene in definitiva $-\rho a$, dove a è l'accelerazione; risulta così verificato che la divergenza di σ coincide con la forza per unità di volume.

Lo stress perpendicolare assume invece il valore:

$$\sigma_t = \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)\sigma_l \tag{5.47}$$

dove:

$$\nu = \frac{1}{2}\frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}$$

Un'onda trasversale comporta invece uno *shear stress:*

$$\sigma_S = \rho u_t c_t \tag{5.48}$$

In generale le onde longitudinali hanno un ruolo più importante nei processi che stiamo considerando.

Onde di grande intensità danno luogo a fenomeni diversi. È noto che i corpi solidi hanno una grande capacità di sopportare compressioni uniformi anche molto grandi, ma sono di converso assai più sensibili a differenze di stress. Se, per un'onda longitudinale, rappresentiamo in ascissa lo stress medio

$$-\frac{1}{3}\left(\sigma_l + 2\sigma_t\right)$$

(o anche lo stress massimo σ_l) ed in ordinata la differenza di stress $\sigma_l - \sigma_t$, otteniamo, evidentemente, una semiretta, il cui coefficiente angolare dipenderà dai valori dei parametri K e μ (Fig. 5.3).

Nello stesso piano possiamo rappresentare la curva limite sotto la quale le deformazioni sono elastiche; la curva sta inizialmente al disopra della semiretta citata, ma tende poi ad un *plateau* e viene così intersecata nel punto "HEL" *(Hugoniot elastic limit)*. Al disopra di questo limite il

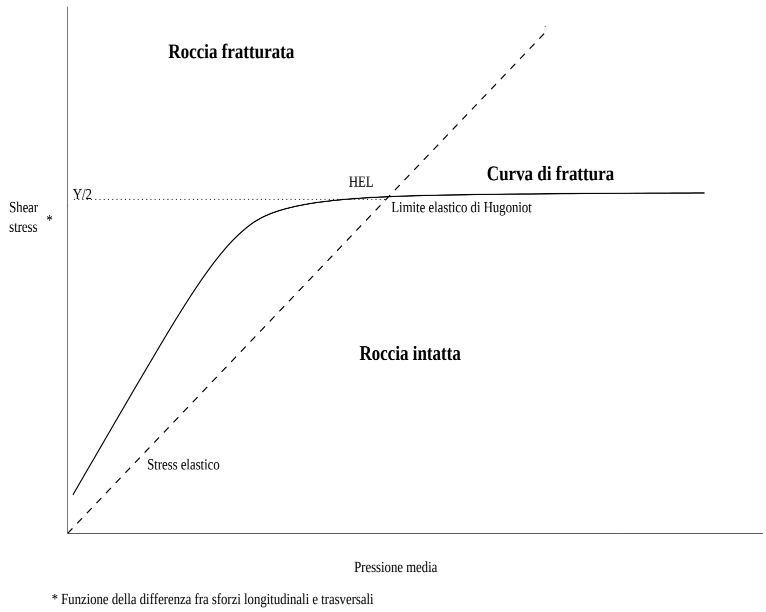

Figure 5.3:

fenomeno esce dal regime elastico ed entra nel regime "plastico". La differenza di stress limite prende il nome di *yield stress* e viene solitamente indicata con la lettera Y. La condizione per il regime elastico è quindi $|\sigma_l - \sigma_t| < Y$.

Superato il limite di Hugoniot l'onda, che ormai produce deformazioni permanenti, si divide in due, un "precursore elastico" che continua a viaggiare a velocità c_l, ed una onda "plastica" che si propaga ad una velocità minore c_B. Tale velocità varia però con l'intensità dell'onda stessa, ed aumenta progressivamente, fino a superare di nuovo c_l. Si entra allora nel regime delle cosiddette "onde d'urto".

È infine molto interessante discutere il comportamento di un'onda in caso di discontinuità: ciò si applica in primo luogo all'arrivo dell'onda al confine del corpo interessato (nel caso di onde nate da un processo d'impatto, quando l'onda ha attraversato tutto il bersaglio), ma anche ad eventuali fratture o vuoti interni, o a passaggi in zone di diversa struttura fisica o composizione chimica.

Ci sono regole generali che caratterizzano questo tipo di fenomeni, legate a richieste di continuità. In generale un'onda di compressione verrà parzialmente trasmessa e parzialmente riflessa generalmente come onda di rarefazione. Quando si arriva alla fine del mezzo la riflessione è totale. Questo fatto presenta due interessanti risvolti: il primo concerne il processo generale; se a un'onda di compressione, che certamente danneggia il corpo, segue un'onda di rarefazione, è assai probabile che in questa fase si amplifichino i processi di formazione e separazione dei frammenti. Inoltre, nel momento della riflessione al bordo, vicino al bordo interferiscono due onde, una di compressione uscente, una di rarefazione entrante; ambedue determinano una velocità u_l della materia presente; essendo le due onde opposte in segno ed in propagazione, le due velocità si sommeranno; avremo allora una anomala velocità $2u_l$, corrispondente ad una forte perturbazione. Essa sarà sovente causa di un processo di frammentazione superficiale, che prende il nome di *spallazione*.

5.8 Problemi di scaling, strength statica e dinamica, teoria del danno

Le onde, dovute all'impatto, attraversano il corpo e attivano processi di rottura. È essenziale, per capire il fenomeno, valutare la velocità con cui la deformazione viene accumulata.

Nel mezzo sono presenti dei "difetti", a livello quasi microscopico, conseguenza di dislocazioni o di piccole fratture. Sono questi i punti deboli sulla quale la perturbazione agisce, facendoli crescere fino a dar vita a vere e proprie superfici di frattura macroscopiche.

In prima istanza l'effetto della perturbazione si concentra sul punto più debole, ossia sul difetto che viene attivato al più basso livello di deformazione, e ne causa la crescita, fino alla rottura del corpo. Può essere un esempio di questo comportamento quello che succede tendendo una sbarra con sempre maggior forza, fino a spezzarla (generalmente in due parti). Se però la perturbazione cresce troppo rapidamente il difetto "leader" non riuscirà ad assorbirne completamente gli effetti (una frattura non può crescere più velocemente di un certo livello) e saranno allora attivati contemporaneamente altri difetti. Il processo segue allora una diversa evoluzione, che porta poi, abitualmente, alla rottura in più parti.

I due regimi sopra descritti vengono detti di *strength statica* e di *strength dinamica*. La strength (ossia il massimo stress prima della rottura) viene calcolata nei due modelli e risulta corretto, nel caso in questione, quello dei due che dà un valore più alto della strength.

Per capire le condizioni di transizione fra i due regimi, per oggetti di dimensioni diverse, possiamo fare l'ipotesi che i difetti obbediscano ad una *distribuzione di Weibull*, che abbina ragionevoli motivazioni teoriche ad una grande semplicità analitica. Tale distribuzione collega il numero dei difetti alla loro deformazione di attivazione:

$$N(\epsilon) = K\epsilon^m \tag{5.49}$$

dove N è il numero dei difetti attivi ad una deformazione ϵ (si tratta quindi di una distribuzione cumulativa), K è una costante di normalizzazione e m è un parametro tipico del materiale in questione (tipicamente, per materiali basaltici, assume valori dell'ordine di 10).

Ovviamente la costante K sarà proporzionale al volume del corpo:

$$K = K_0 V$$

Se vogliamo ora calcolare, per un dato corpo, la minima deformazione per cui si abbia rottura (il che poi permette di calcolare la strength), dobbiamo porre $N = 1$ nella (5.49): ne consegue una stima di ϵ_{min}:

$$\epsilon_{min} = V^{(-1/m)} = \left(\frac{4}{3}\pi K_0 R^3\right)^{-1/m} \tag{5.50}$$

dove R è il raggio del bersaglio. Al crescere delle dimensioni la deformazione minima necessaria per la rottura, ed il conseguente stress, sono sempre più piccoli.

Ciò non vuole ancora dire che i corpi più grandi sono più fragili; implica semplicemente che per la rottura di corpi grandi, in seguito a collisioni ad alta velocità, siamo probabilmente sempre in regime di strength dinamica.

La teoria della strength dinamica è troppo complessa per essere trattata qui in dettaglio. Ci limitiamo a dire che la strength tensile prende la forma:

$$\sigma \propto \dot{\epsilon}^{3/m+3} \tag{5.51}$$

dove $\dot{\epsilon}$ prende il nome di *strain rate* e rappresenta appunto la velocità di crescita della deformazione relativa (intuitivamente ha qualche affinità con un gradiente di velocità). Vicino al punto di impatto $\dot{\epsilon}$ può essere stimato dell'ordine di v_p/l, dove v_p è la velocità di impatto e l la dimensione del proiettile.

Possiamo allora, dalla (5.51), dedurre una approssimativa legge di scaling della strength dinamica con le dimensioni del proiettile:

$$\sigma \propto l^{-3/m+3} \simeq l^{-\frac{1}{4}} \tag{5.52}$$

valida se $m \simeq 10$. Notiamo che, in un urto con certe caratteristiche distruttive, il rapporto fra le dimensioni del proiettile e quelle del bersaglio l/R non cambia molto al variare della scala (anche se, tendenzialmente, diminuisce lentamente al crescere delle dimensioni dei corpi coinvolti); il confronto tra le equazioni (5.50) e (5.52) ci dice che, se per una certa scala la strength è in regime dinamico, resta tale anche per le scale maggiori. Ma, soprattutto, la (5.52) ci conferma definitivamente che corpi di dimensioni maggiori dovrebbero risultare più fragili all'impatto, anche se, per i corpi più grandi, il possibile termine aggiuntivo alla strength dovuto alla autocompressione gravitazionale potrebbe cambiare un po' le cose. È molto importante anche comprendere il *timing* dei diversi processi fisici all'interno del bersaglio. Secondo i risultati delle simulazioni numeriche rivolte allo studio degli impatti tra corpi di grosse dimensioni (quindi di tipo planetario, non bersagli da esperimenti di laboratorio) si ha una estesa fratturazione del bersaglio *precedente* alle ultime fasi dei processi di allocazione dell'energia dell'impatto (legati alla trasmissione delle onde d'urto); in tal caso dovremmo quindi aspettarci che la fase finale del processo, quella in cui si determina per esempio la velocità di espulsione dei frammenti, avvenga in condizioni di strength molto bassa, ed anche di scarsa capacità del mezzo di trasmettere l'energia. Ciò porterebbe in definitiva ad abbinare una estesa frammentazione con una espulsione dei frammenti a bassa velocità: un comportamento che potrebbe essere assimilato a quello tipico di un bersaglio con un basso valore di S e anche di F_{ke}. Notiamo anche che, all'interno del bersaglio, $\dot{\epsilon}$ prende valori molto diversi. Ciò rende differente il livello di frammentazione in zone diverse del bersaglio, così come d'altro canto si osserva negli esperimenti di laboratorio.

La teoria del progressivo accumularsi del **danno** in una struttura investita da una perturbazione è uno dei problemi più complessi, ed ha sostanzialmente una base empirica. Un modello attualmente molto utilizzato (dovuto a Grady e Kipp) si basa sulle seguenti equazioni:

a) Un mezzo danneggiato può essere caratterizzato da un unico parametro D , compreso fra 0 (materiale intatto) e 1 (distruzione completa). La relazione (5.28) prende la forma:

$$\sigma_{ij} = K(1-D)\epsilon_{ll}\delta_{ij} + 2\mu(1-D)\left(\epsilon_i j - \frac{1}{3}\epsilon_{ll}\delta_{ij}\right) \tag{5.53}$$

b) Se n è il numero, per unità di volume, delle microfratture di semilunghezza l, e che quindi interessano un volume

$$V = \frac{4}{3}\pi l^3$$

si ha:

$$D = nV \tag{5.54}$$

c) Il danno si accumula nel tempo, anche perché le fratture crescono con una velocità c_g:

$$D(t) = \int_{-\infty}^{t} \dot{n}(t')V(t-t')dt' \tag{5.55}$$

ed essendo:

$$V(t) \propto \frac{4}{3}\pi c_g^3 t^3$$

si ha:

$$D(t) = \frac{4}{3}\pi c_g^3 \int_{-\infty}^{t} \frac{dN}{d\epsilon}\dot{\epsilon}(1-D)(t-t')^3 dt' \tag{5.56}$$

dove si assume, come $N(\epsilon)$, la distribuzione di Weibull sopra definita.

La teoria del danno, così enunciata, permette di prevedere le caratteristiche dei processi di frammentazione: quando il danno è completo, ad un certo tempo t_f, è per esempio possibile calcolare la distribuzione di dimensioni dei frammenti in funzione dello strain rate:

$$F(L) = \frac{\pi m K_0 L^3}{12 c_g}\left(t_f - \frac{L}{2c_g}\right)^{m-1} \dot{\epsilon}^m \tag{5.57}$$

5.9 Conclusioni: problemi aperti.

Non è per niente facile mettere insieme tutta la fisica di cui abbiamo in precedenza fatto cenno. Il problema più grave nell'elaborazione di modelli numerici adeguati consiste nello spaventoso "range dinamico" intrinseco ad un processo che parte da difetti microscopici per espanderli poi a frammentare oggetti anche molto grandi, e nel quale il livello di concentrazione di energia ed i relativi tempi caratteristici differiscono di diversi ordini di grandezza fra punti e tempi diversi.

In letteratura si trovano numerose recenti simulazioni numeriche (*hydrocodes*); non possiamo però essere ancora del tutto sicuri della attendibilità dei risultati, così come non possiamo completamente dirci sicuri delle caratteristiche dello "scaling" dalle dimensioni tipiche degli esperimenti di laboratorio (che i modelli numerici riproducono discretamente) a quelle dei processi astronomici. È anche probabile che questi ultimi casi siano resi molto più complessi e in parte imprevedibili dalla articolata evoluzione collisionale precedente all'ultimo impatto. Probabilmente corpi che sono stati precedentemente alterati dalle collisioni reagiscono in modo totalmente differente a collisioni successive. Questa complicazione rende ovviamente anche molto più difficile la applicazione e l'interpretazione dei modelli numerici. Molte problematiche asteroidali –e non solo– dipendono criticamente dagli aspetti problematici delle teorie collisionali.