Chapter 6

Formazione dei sistemi planetari.

6.1 Introduzione.

Il problema della formazione del Sistema Solare è da sempre considerato uno dei problemi centrali della astrofisica e, forse, della scienza in generale, anche per i numerosi aspetti e le implicazioni interdisciplinari. Negli ultimi anni la scoperta, lungamente attesa, di altri sistemi planetari, con le analogie e alcune sorprendenti differenze rispetto al Sistema Solare (v. Cap.7), ha reso ancora più interessante e complesso il problema. Anche se nel tempo sono stati proposti modelli di formazione diversi, si ritiene generalmente che il processo di formazione di sistemi planetari debba essere inserito nello scenario generale della formazione stellare, ripercorrendo nell'ottica della scienza moderna l'antica ipotesi della "nebulosa solare" di Kant e Laplace. La scoperta di numerosi sistemi extrasolari, e la stima corrente per la quale una frazione significativa delle stelle (10%?) ha dei pianeti di grosse dimensioni, rende ancora più ragionevole vedere la formazione dei pianeti come uno sviluppo particolare ma frequente della formazione di stelle o di sistemi stellari binari e multipli.

In questo complesso capitolo presenteremo una sintetica trattazione degli aspetti essenziali della formazione stellare, discutendo poi come in questo scenario si inneschi il processo di formazione planetaria. Il problema della formazione stellare (e *a fortiori* quello dei sistemi planetari) è troppo complesso per essere compreso e analizzato compiutamente mediante un "paradigma" teorico generale e onnicomprensivo, anche se molte simulazioni numeriche sono state effettuate negli ultimi anni con un certo successo. Presenteremo quindi alcuni essenziali strumenti di analisi, ingredienti essenziali per la costruzione di un modello generale, in parte non ancora disponibile e sicuramente, in ogni caso, troppo complicato e articolato per i nostri scopi. Ci dedicheremo successivamente a discutere come dal primo stadio del processo di formazione planetaria (quello caratterizzato dalla formazione di numerosi "planetesimi") si possa poi disegnare un convincente modello in grado di spiegare gran parte delle caratteristiche osservative del nostro sistema planetario. Verranno anche introdotti alcuni processi (come la migrazione e lo scattering a più pianeti) in parte rilevanti per la formazione del Sistema Solare, ed essenziali per spiegare le caratteristiche di molti sistemi extrasolari.

6.2 La formazione stellare.

Il problema della formazione stellare è tra i più complessi dell'astrofisica. La formazione stellare comincia con il collasso di una nube di gas interstellare, dovuto all'autogravitazione (eventualmente avviato o facilitato da eventi esterni che causano compressione, o esplosioni che generano onde d'urto ecc.). Le nubi di gas interstellare, molto abbondanti in galassie come la nostra, si differenziano per dimensioni, densità e temperatura. Interessanti per i processi di formazione sono quelle abbastanza fredde. Spesso i processi di formazione hanno luogo in gigantesche **nubi molecolari**, partendo da regioni sovradense. Il processo di formazione stellare è un processo di condensazione, che inizia a densità estrememente basse, e che finisce quando i prodotti del processo hanno al centro raggiunto condizioni fisiche (densità e temperatura) idonee all'innesco di reazioni nucleari di fusione. Anche se lo scenario generale è abbastanza chiaro, ci sono ancora molti problemi aperti (anche di tipo qualitativo). In questa presentazione ci limiteremo a definire alcuni punti fermi e a descrivere, anche con l'uso di *toy models*, alcuni processi di importanza critica. L'uso di toy models è molto frequente in astrofisica, e serve per evidenziare i punti salienti di un processo senza la complessità di un modello realistico, anche approssimato.

6.2.1 L'inizio del collasso.

All'inizio abbiamo una nube, o una regione di nube, in cui la gravità comincia a innescare una contrazione, che la pressione del mezzo non è in grado di impedire. Successivamente la contrazione accelera, e diviene un vero e proprio **collasso**. La contrazione diminuisce il momento d'inerzia; la condizione per il suo inizio sarà (in base al teorema del viriale; v. le dispense di Astrofisica):

$$\frac{d^2I}{dt^2} < 0 \;\Rightarrow\; 2E_T + U < 0 \tag{6.1}$$

o anche

$$E_T < \left|\frac{U}{2}\right| \tag{6.2}$$

Consideriamo ora una nube omogenea di idrogeno molecolare[1] di massa $M = Nm_{H_2} = 2Nm_p$, di temperatura media T e densità ρ; si ha:

$$E_T = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}\frac{M}{2m_p}kT \tag{6.3}$$

mentre

$$\begin{aligned}
\left|\frac{U}{2}\right| &= -\frac{U}{2} = \frac{1}{2}G\int_0^M \frac{M(r)dM(r)}{r} = \\
&= \frac{1}{2}G\int_0^R \frac{4}{3}\pi\rho r^3\frac{1}{r}4\pi\rho r^2 dr = \frac{1}{2}G\frac{16}{3}\pi^2\rho^2\int_0^R r^4 dr = \\
&= \frac{1}{2}G\frac{16}{15}\pi^2\rho^2 R^5 = \frac{1}{2}G\frac{3}{5}\frac{16}{9}\pi^2\rho^2 R^6\frac{1}{R} =
\end{aligned}$$

[1] i gradi di libertà interni si assumono congelati

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}\right] \tag{6.4}$$

La (6.2) è equivalente a porre:

$$\frac{3}{2}\frac{M}{2m_p}kT < \frac{3}{10}\frac{GM^2}{R}$$

ossia:

$$kT < \frac{2}{5}\frac{GMm_p}{R} \tag{6.5}$$

ed essendo

$$\frac{4}{3}\pi\rho R^3 = M \quad \Rightarrow \quad R = \left[\frac{M}{\frac{4}{3}\pi\rho}\right]^{\frac{1}{3}}$$

si ottiene infine:

$$kT < \frac{2}{5}\left[\frac{4\pi}{3}\right]^{\frac{1}{3}} GM^{\frac{2}{3}}m_p\rho^{\frac{1}{3}} \tag{6.6}$$

Per densità molto basse, quali quelle che stiamo considerando, la nube è trasparente; la temperatura delle singole molecole dipende quindi, più che dalle caratteristiche specifiche della nube, dall'ambiente interstellare in generale (presenza di sorgenti di energia prossime, raggi cosmici ecc...); possiamo quindi supporre che T non vari molto nelle prime fasi del collasso. Uno schema di lavoro buono si ottiene sovente ponendo $T = cost \sim 10K$. La (6.6) prende la forma:

$$M^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{1}{3}} > c \tag{6.7}$$

o anche

$$\rho > cost. \cdot M^{-2} \tag{6.8}$$

che collega la densità minima, alla quale il collasso può cominciare, con la massa della nube. In numeri, essendo in CGS $k \sim 10^{-16}$, $T = 10$, $G = 1/1.5 \cdot 10^7$, $M \sim 2 \cdot 10^{33}$ $(M/M_\odot)$, $m_p \sim 1.5 \cdot 10^{-24}$ si ha approssimativamente:

$$\rho > 10^{-18}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2} \quad g/cm^3 \tag{6.9}$$

$M/M_\odot$	1	10	10^2	10^4	10^6
$\rho/g\ cm^{-3}$	10^{-18}	10^{-20}	10^{-22}	10^{-26}	10^{-30}

Il collasso delle nubi fredde più massicce appare quindi inevitabile. In realtà la situazione è un po' più complessa. Nelle nubi molecolari giganti sono di regola presenti, fin da prima dell'avvio dei processi di formazione, delle zone molto più dense della regione circostante. È in queste regioni che i processi di collasso hanno origine. Ci sono poi altri fattori che possono alterare la situazione, (campi magnetici, turbolenza ecc.). In linea di principio sia campi magnetici che turbolenza potrebbero esercitare un ruolo di stabilizzazione. In realtà sembra che il ruolo dei campi magnetici non sia essenziale, e che la turbolenza giochi più parti in commedia, svolgendo anche un ruolo significativo nel comprimere inizialmente parti della nube, creando regioni sovradense e avviando così la contrazione.

Una analisi elementare, basata ancora sul teorema del viriale, ci permette di capire anche quale possa essere il ruolo stabilizzatore della rotazione.

In presenza di rotazione si ha:

$$E_T \to \frac{3}{2}NkT + E_{rot} = E_{th} + E_{rot} \tag{6.10}$$

Definendo

$$\frac{E_{th}}{|U|} = \alpha \quad \frac{E_{rot}}{|U|} = \beta \tag{6.11}$$

la condizione per il collasso diviene

$$\alpha + \beta < \frac{1}{2} \tag{6.12}$$

Va sottolineato che la presenza di rotazione rompe intrinsecamente la simmetria sferica del problema. Lo sviluppo del discorso che presenteremo va quindi visto come una rozza approssimazione della realtà. Come abbiamo detto, nelle prime fasi del collasso la nube è trasparente; anche se una analisi dettagliata del bilancio termico permetterebbe di calcolare con precisione $T(\rho, t)$, possiamo in prima approssimazione porre $T = cost.$; ammettiamo poi che si conservino la massa M ed il momento angolare L. Si ha allora:

$$E_{th} = \frac{3}{2}kNT = cost. \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
E_{rot} &= \frac{1}{2}\frac{L^2}{I} \sim \frac{L^2}{2}\frac{1}{\frac{2}{5}MR^2} = \frac{L^2}{2}\frac{1}{\frac{2}{5}M\left[\frac{M}{\frac{4}{3}\pi\rho}\right]^{\frac{2}{3}}} = \\
&= \frac{L^2}{2}\frac{1}{\frac{2}{5}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}M^{\frac{5}{3}}\rho^{-\frac{2}{3}}} = \frac{5}{4\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}\frac{L^2}{M^{\frac{5}{3}}}\rho^{\frac{2}{3}} = \\
&= cost'\,\rho^{\frac{2}{3}}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$U \simeq -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = cost''\,\rho^{\frac{1}{3}} \tag{6.15}$$

Si ha di conseguenza che

$$\alpha(\rho) = \alpha(\rho_0)\left[\frac{\rho}{\rho_0}\right]^{-\frac{1}{3}} \tag{6.16}$$

$$\beta(\rho) = \beta(\rho_0) \left[\frac{\rho}{\rho_0} \right]^{\frac{1}{3}} \tag{6.17}$$

In termini della variabile $\psi = \rho/\rho_0$ e di $\alpha_0 = \alpha(\rho_0)$ e $\beta_0 = \beta(\rho_0)$ possiamo definire la funzione

$$f(\psi) = \alpha_0 \psi^{-\frac{1}{3}} + \beta_0 \psi^{\frac{1}{3}} \tag{6.18}$$

Il teorema del viriale ci dice che il sistema si espanderà sicuramente se $f(\psi) > 1/2 \ \forall\psi$, e collasserà sicuramente se $f(\psi) < 1/2 \ \forall\psi$.

La f ha un unico punto stazionario; derivando si ottiene:

$$f'(\psi) = \frac{\left[-\frac{1}{3}\alpha_0 \psi^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\beta_0 \psi^{\frac{1}{3}} \right]}{\psi} = 0$$

per

$$\psi = \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0} \right]^{\frac{3}{2}} \equiv \psi_0 \tag{6.19}$$

e

$$f(\psi_0) = \alpha_0 \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0} \right]^{-\frac{1}{2}} + \beta_0 \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0} \right]^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\alpha_0 \beta_0} \tag{6.20}$$

Ora in ψ_0 la f ha un minimo, come si dimostra derivando ancora:

$$\begin{aligned} f''(\psi_0) &= \frac{4}{9}\alpha_0 \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0} \right]^{-\frac{7}{2}} - \frac{2}{9}\beta_0 \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0} \right]^{-\frac{5}{2}} = \\ &= \frac{2}{9}\alpha_0 \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0} \right]^{-\frac{7}{2}} > 0 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Si ha quindi una condizione di collasso proibito:

$$16\alpha_0\beta_0 > 1 \tag{6.22}$$

Naturalmente un modello più accurato porterebbe a risultati quantitativamente un po' differenti.

Notiamo anche che se $\beta_0 = 0$ (assenza di rotazione) $\alpha + \beta$ decresce sempre e tende a zero; il sistema approssima un "collasso libero"; in teoria esso dovrebbe raggiungere densità infinite in un tempo finito. In pratica ciò non avviene per l'intervento di altri fenomeni, primo fra tutti il riscaldamento del gas ("fase adiabatica").

Ricordiamo infine che in generale $\alpha + \beta = 1/2$ è condizione necessaria ma non sufficiente per l'equilibrio; se per esempio con $\alpha + \beta \geq 1/2$ il sistema si sta contraendo, continuerà a farlo salvo poi, eventualmente, rimbalzare indietro ed assestarsi all'equilibrio dopo una serie di oscillazioni smorzate. La condizione $\alpha + \beta = 1/2$ equivale ad una condizione meccanica $\vec{F} = 0$ e non $\vec{v} = 0$.

6.2.2 Fissione per rotazione.

Il problema del **frazionamento** è di fondamentale importanza. Le nubi interstellari in cui si avvia il processo di formazione stellare hanno spesso una massa molto grande ($10^5 - 10^6 M_\odot$); anche se il collasso non si avvia simultaneamente in tutta la struttura, è chiaro che alla fine si otterrà un ammasso stellare; si deve quindi avere un processo di frazionamento globale. Inoltre tra le stelle almeno 1/3 sono doppie; l'ipotesi di una formazione di sistemi binari (o multipli) per cattura non regge: è troppo improbabile (salvo che in casi particolari, come nelle zone centrali degli ammassi globulari) per spiegare la grande abbondanza osservata. La formazione di stelle doppie deve essere quindi inserita nel processo generale di formazione, o come conseguenza del frazionamento durante il collasso, o come risultato della fissione di una protostella (o di una struttura protostellare, quale potrebbe essere un **disco di accrescimento** intorno a una stella in formazione).

In tutti i casi, gioca un ruolo essenziale l'aumentare della energia rotazionale, data la conservazione del momento angolare, durante le fasi di contrazione. Può essere interessante presentare un *toy model* per spiegare meglio il punto.

In condizioni di equilibrio, un sistema rotante diventa instabile per fissione quando il rapporto fra energia rotazionale e gravitazionale, β, supera il valore critico $\beta_{crit} \sim .25$. Il trasferimento di questa proprietà al caso dinamico, in cui il sistema sta collassando, non è ovvio. Alcune simulazioni numeriche confermano l'esistenza di una fase di instabilità, ma con caratteristiche differenti. Nondimeno l'esito finale potrebbe non essere troppo diverso. Per capire che cosa potrebbe succedere facciamo l'ipotesi che si abbia un processo di fissione quando $\beta > \beta_{crit}$, che la fissione sia in due parti identiche ($M \to M/2 + M/2$), e che ognuna delle due si prenda una frazione λ del momento angolare totale ($2\lambda < 1$; il resto del momento angolare iniziale va in momento orbitale: $\lambda_{orb} : 2\lambda + \lambda_{orb} = 1$).

Possiamo allora seguire una catena di fissioni gerarchiche

$$\begin{array}{ll} \rho = \rho_0 & \beta = \beta_0 < \beta_{crit} \\ \rho = \rho_1 & \beta = \beta_{crit} \end{array}$$

$$M \quad \begin{array}{lll} M/2 & \rho = \rho_1 & L = \lambda L \\ & & \\ M/2 & \rho = \rho_1 & L = \lambda L \end{array}$$

$$\begin{aligned} E_{rot} &= C \frac{L^2}{M^{\frac{5}{3}}} \rho^{\frac{2}{3}} \\ E_{rot}^{(1/2)} &= C \frac{\lambda^2 L^2 2^{\frac{5}{3}}}{M^{\frac{5}{3}}} \rho^{\frac{2}{3}} = E_{rot}\, 2^{\frac{5}{3}} \lambda^2 \end{aligned}$$

con $C = cost.$, si ha inoltre

$$\begin{aligned} U &= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = -\frac{3}{5} G M^{\frac{5}{3}} \left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^{\frac{1}{3}} \\ U^{(1/2)} &= U\, 2^{-\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

da cui

$$\beta^{(1/2)} = 2^{\frac{10}{3}}\lambda^2\beta_{crit} \tag{6.23}$$

Se $\lambda < 2^{-5/3}$ (.3) i due frammenti riprendono a collassare finché

$$\beta^{(1/2)}_{\rho_2} = \beta_{crit}$$

che avviene quando:

$$2^{\frac{10}{3}}\lambda^2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 \tag{6.24}$$

Il processo si ripete finché il collasso non ha termine.

Se λ non è troppo piccolo è possibile avere una serie abbastanza lunga di fissioni gerarchiche, secondo lo schema

		M							
1	ρ_1	$M/2$			$M/2$				
2	$\rho_2 = A\rho_1$	$M/4$	$M/4$	$M/4$	$M/4$				
3	$\rho_3 = A^2\rho_1$	$M/8$	$M/8$	$M/8$	$M/8$	$M/8$	$M/8$	$M/8$	$M/8$
4	$\rho_4 = A^3\rho_1$	..	..	..	..	..	..	..	..

I momenti angolari corrispondenti saranno, in unità di L:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_{orb(1)} & = & 1-2\lambda \\ \lambda_{orb(2)} & = & \lambda(1-2\lambda) \\ \lambda_{orb(3)} & = & \lambda^2(1-2\lambda) \\ \lambda_{orb(4)} & = & \lambda^3(1-2\lambda) \end{array}\right\} \tag{6.25}$$

e dalla III legge di Keplero

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{cost.}{(m_1+m_2)} \tag{6.26}$$

si ha:

$$a = cost'\frac{L^2}{m_{tot}^3} \tag{6.27}$$

ne consegue

$$\left\{\begin{array}{ll} a_1 = cost & (1-2\lambda)^2 \\ a_2 = cost & 8\lambda^2(1-2\lambda)^2 = 8\lambda^2 a_1 \\ a_3 = cost & 64\lambda^4(1-2\lambda)^2 = 64\lambda^4 a_1 \\ a_4 = cost & 512\lambda^6(1-2\lambda)^2 = 512\lambda^6 a_1 \end{array}\right\} \tag{6.28}$$

Per le separazioni avremo infine (al momento della fissione)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g_1 & = & \frac{2R_1}{a_1} = cost \frac{M^{\frac{1}{3}}}{\rho_1^{\frac{1}{3}} a_1} \\ g_2 & = & \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{cost M^{\frac{1}{3}}}{\rho_2^{\frac{1}{3}} 8\lambda^2 a_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\lambda^2 2^{\frac{10}{3}}}{8\lambda^2} g_1 = g_1 \\ ... & = & ... \end{array} \right\} \tag{6.29}$$

Le (6.28) e (6.29) permettono di collegare i rapporti fra le varie caratteristiche delle gerarchie (semiassi orbitali o densità di fissione) con il parametro λ.

Naturalmente questo modello non spiega quello che succede in realtà. Il processo globale di formazione dipende sicuramente anche da una distribuzione di massa disomogenea all'inizio della contrazione, indotta dalla turbolenza o da altre cause; la stessa formazione di stelle doppie potrebbe avvenire tramite più di un canale: il frazionamento durante le fasi di collasso spiegherebbe bene i sistemi molto larghi. La formazione di binarie strette potrebbe invece venire come conseguenza della formazione di strutture asimmetriche intorno a oggetti protostellari (come recentemente osservato dal telescopio spaziale Spitzer). Il problema, di grande rilevanza, è lontano da una soluzione. Ovviamente, nello stesso contesto si situa il problema delle condizioni "iniziali" (che in realtà iniziali non sono, essendo il risultato di un processo di formazione partito dalla materia diffusa) che causano la formazione di un sistema planetario intorno a una stella.

6.2.3 La fase "adiabatica".

Finchè la materia non si riscalda, il collasso non può essere fermato. La rotazione (e in qualche misura i campi magnetici) può influenzarne gli esiti, frammentare, rompere la simmetria ecc.; ma il collasso delle singole parti sarebbe distinato a procedere fino a grandi densità se la materia non cominciasse a trattenere il calore e a riscaldarsi. Si ha, dopo la prima fase del collasso, detta "isoterma" (v. la discussione nel par. 6.2.1), quella che viene chiamata "adiabatica".

Aumentando la densità il libero cammino medio dei fotoni all'interno della nube collassante diviene minore del raggio della stessa nube e la temperatura comincia ad aumentare.

Il libero cammino medio è definito come

$$l = \frac{1}{k\rho} \tag{6.30}$$

(k è l'opacità); la condizione per l'inizio del riscaldamento diventa:

$$k\rho R > 1 \tag{6.31}$$

In generale $k = k(\rho, T)$, ed aumenta sensibilmente con T; ma finché siamo nella zona isoterma $T \sim cost\,(\sim 10\,K)$ e k è $\sim$ costante; la (6.31) prende la forma

$$\rho R > cost.$$

ossia:

$$\rho_{AD} = cost \cdot M^{-1/2} \tag{6.32}$$

dove ρ_{AD} è la densità per la quale la temperatura comincia a salire e comincia la fase adiabatica.

Se questa fase fosse reamente adiabatica non sarebbe possibile aumentare ρ di oltre un fattore 8; ammettiamo infatti che per $\rho = \rho_{AD}$ sia $E_T \ll |U|$ ($\alpha \sim 0$); la conservazione dell'energia dice che $\Delta E_T = -\Delta U$; l'equilibrio sarà raggiunto quando:

$$E_T(AD) + \Delta E_T = \frac{1}{2}|U + \Delta U|$$

da cui segue che

$$\Delta E_T \simeq \frac{3}{10} GM^2 \frac{1}{R + \Delta R} = \frac{3}{5} GM^2 \left(\frac{1}{R + \Delta R} - \frac{1}{R} \right)$$

ossia

$$\frac{1}{2} \frac{1}{R + \Delta R} = \frac{1}{R} \Rightarrow R + \Delta R = \frac{R}{2} \Rightarrow \rho' = 8\rho_{AD} \tag{6.33}$$

Ma nella evoluzione reale buona parte dell'energia viene comunque emessa.

Uno schema spesso usato in letteratura fa uso di una "pseudoadiabatica" di gas biatomico o monoatomico

$$P \propto \rho^{\frac{5}{3}} \quad o \quad \rho^{\frac{7}{5}} \tag{6.34}$$

che corrisponderebbe a una vera adiabatica solo se si partisse da condizioni di equilibrio o di quasi equilibrio.

Se comunque le grandezze termodinamiche si comportano secondo la (6.34), avremo

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_{AD}} \right)^{\gamma - 1} \\ P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_{AD}} \right)^{\gamma} \end{array} \right\} \tag{6.35}$$

Se $\gamma > 4/3$ α prima o poi ridiventa $> 1/2$; la condizione di equilibrio ha la forma:

$$kT_0 \left[\frac{\rho_{EQ}}{\rho_{AD}} \right]^{\gamma - 1} = cost \cdot M^{\frac{2}{3}} \rho_{EQ}^{\frac{1}{3}}$$

ossia:

$$\rho_{EQ}^{\gamma - 4/3} = cost \cdot M^{\frac{2}{3}} \rho_{AD}^{\gamma - 1} \tag{6.36}$$

Mediante la (6.32) si ha infine

$$\rho_{EQ} = cost \cdot M^{\left(\frac{7}{6} - \frac{\gamma}{2}\right)/\left(\gamma - \frac{4}{3}\right)} \tag{6.37}$$

$$\equiv cost \cdot M^{\theta} \quad (def.\theta) \tag{6.38}$$

Per esempio se $\gamma = 5/3$ (adiabatica di gas perfetto monoatomico) $\theta = 1$, se $\gamma = 7/5$ $\theta = 7$. Quantitativamente, per $M \sim M_\odot$:

$$\gamma = \frac{5}{3} \quad \rho_{EQ} \sim 10^{-10} g/cm^3$$

$$\gamma = \frac{7}{5} \quad \rho_{EQ} \sim 10^{6} g/cm^3$$

Solo se la temperatura aumenta rapidamente con la densità sarà possibile ristabilire un realistico equilibrio. Fisicamente la situazione è resa più complessa dal fatto che per $T > 10^3$ K hanno inizio i processi di dissociazione molecolare e di ionizzazione, che rallentano l'aumento di T e di P con ρ, creando le condizioni per una nuova accelerazione del collasso.

In ogni caso alla fine del collasso la zona centrale raggiungerà l'equilibrio mentre le parti periferiche continuano a contrarsi. Si avrà un fenomeno di rimbalzo, e solo successivamente il sistema si assesterà in uno stato di quasi equilibrio, dal quale una lenta contrazione porterà al raggiungimento delle condizioni per l'innesco delle reazioni nucleari.

6.3 Formazione di sistemi planetari: scenario generale.

6.3.1 Introduzione.

Come già detto in precedenza, qualunque teoria di formazione deve spiegare una serie di fatti:

1. Le masse tipiche delle nubi di gas interstellare sono spesso molto maggiori delle masse tipiche delle stelle.
2. Le stelle sono per lo più raggruppate in ammassi.
3. Oltre metà delle stelle sono in sistemi doppi o multipli.
4. Esistono numerosi sistemi planetari (si pensa che una percentuale intorno al $5-10\%$ delle stelle abbia dei pianeti massicci).

Un modello, per essere convincente, deve quindi contemplare:

1. Fenomeni di frazionamento in molti sistemi.
2. Fenomeni di fissione o frazionamento finali in pochi sistemi.
3. Formazione di strutture stella+disco protoplanetario.

La situazione è al momento molto problematica: non è possibile trattare il problema nè con calcoli analitici sufficientemente sofisticati nè con simulazioni numeriche del tutto affidabili e soprattutto in grado di seguire l'intero processo, anche a causa della grande variazione dei principali parametri fisici (densità, temperatura) dall'inizio alla fine del processo.

Ricordiamo qui alcuni aspetti significativi:

1. Il frazionamento è legato alla presenza nelle nubi molecolari di condensazioni iniziali abbastanza forti, che possono avviare un processo di collasso intorno a diversi punti di aggregazione; non è chiaro se anche un meccanismo di fissione per rotazione a cascata, come quello descritto in precedenza, possa avere un ruolo determinante; nell'evoluzione successiva entrano in gioco anche fenomeni più complessi come la formazione di energetici *jets* di materia, sicuramente molto efficaci per trasferire il momento angolare.

2. La presenza di moti turbolenti esercita un ruolo complesso e anche ambiguo (v. anche il Par. 6.4).

3. Campi magnetici e rotazione creano un meccanismo di inibizione ai processi di collasso che però agisce in modo anisotropo, bloccandolo sul piano di simmetria (quello che contiene le linee di forza, o quello perpendicolare al momento angolare).

4. Se si ammette la conservazione della simmetria assiale intorno all'asse di rotazione, sono possibili qualitativamente due tipi di configurazione: una condensazione centrale con un disco e una struttura a toro, ed un caso intermedio, quando il disco è di massa confrontabile con quello della stella centrale. Se si viola la conservazione della simmetria assiale è possibile formare oggetti triassiali, o condensazioni circondate da spirali ecc.. Da queste varie e diverse strutture devono scaturire, al variare dei parametri, tutti i possibili esiti finali (stelle singole, stelle con pianeti, stelle doppie e multiple con e senza pianeti).

5. Osservativamente i sistemi doppi con componenti di uguale massa rappresentano la maggioranza di quelli più stretti del Sistema Solare; è possibile l'esistenza di un secondo picco nella distribuzione dei rapporti di massa, che sarebbe situato a ($m_2/m_1 \sim 1/4$); i sistemi doppi più larghi hanno in generale componenti di masse diverse. Ciò potrebbe essere un sintomo dell'esistenza di due meccanismi di formazione diversi.

Trovare un modello unitario che possa riprodurre le osservazioni, e prevedere la formazione contestuale delle stelle e dei sistemi planetari, è obbiettivo di grande rilevanza ma di lungo periodo.

6.3.2 Le caratteristiche primarie del Sistema Solare.

La storia moderna delle "'teorie cosmogoniche", vale a dire dai modelli di formazione del Sistema Solare inizia con la teoria della nebulosa planetaria di Kant-Laplace.

In realtà le conoscenze moderne sul Sistema Solare identificano alcune caratteristiche qualitative essenziali su cui è necessario basare qualunque ragionevole teoria di formazione.

Tra queste si distinguono:

1. La natura del Sistema Solare, con pianeti approssimativamente in orbite coplanari.

2. L'esistenza e le caratteristiche dei sistemi di satelliti dei pianeti maggiori.

3. Il cosiddetto "problema del momento angolare" ossia come sia possibile che il Sole, con oltre il 99% della massa totale del Sistema Solare, abbia solo il 10% del momento angolare totale.

Altre caratteristiche rilevanti, ma meno essenziali per una prima selezione dei possibili modelli di formazione, sono le anomalie di spin del Sole e dei pianeti, l'esistenza di almeno due gruppi di pianeti con diverse caratteristiche fisiche e chimiche, l'esistenza dei corpi minori, le proprietà del sistema Terra–Luna ecc..

6.3.3 Il problema del momento angolare e ipotesi di soluzione.

Fino a pochi anni fa la soluzione del problema del momento angolare sembrava il più critico vincolo ad ogni possibile modello teorico di formazione del Sistema Solare. In effetti i termini della questione sono impressionanti. Il Sole ruota intorno al proprio asse con un periodo di circa un mese. Il suo momento angolare **per unità di massa** può essere stimato in:

$$L_\odot/M_\odot = 0.4R_\odot^2\Omega_\odot \simeq 2\ 10^{21}\frac{2\pi}{310^6} \simeq 4\ 10^{15}cm^2/s \tag{6.39}$$

Il momento angolare dei pianeti è invece in gran parte momento angolare orbitale (il termine di spin è al confronto piccolo e può essere trascurato, almeno a questo livello di considerazioni qualitative). Nel caso di Giove (di gran lunga il più massiccio dei pianeti) il momento angolare per unità di massa può essere stimato in:

$$L_{Giove,orb}/M_{Giove} = a_{Giove}^2\Omega_{Giove} \simeq 6\ 10^{27}\frac{2\pi}{310^8} \simeq 10^{20}cm^2/s \tag{6.40}$$

che è superiore per oltre quattro ordini di grandezza a quello solare. Anche effettuando il confronto con il materiale solare all'equatore (come in Cole e Woolfson, 2002, [1]) il rapporto resta comunque vicino a 10000. Per i pianeti più esterni è ovviamente possibile trovare anche dei valori maggiori (ricordiamo che il momento angolare orbitale cresce con il semiasse maggiore dell'orbita come $a^{1/2}$, in conseguenza della terza legge di Keplero).

In anni recenti il problema del momento angolare è stato, se non risolto completamente, ampiamente sdrammatizzato. Sono stati trovati dei possibili meccanismi di trasferimento di momento angolare verso l'esterno della nebulosa protoplanetaria, sulla base di processi legati alla turbolenza o ai campi magnetici. Quest'ultimo processo, detto *magnetic braking*, è legato ad una iniziale rotazione più veloce del Sole, che provocherebbe anche un "aggomitolarsi" delle linee di forza del campo magnetico solare all'esterno del Sole. L'interazione di questo campo magnetico con le particelle cariche presenti nel vento solare (molto più intenso di oggi, in alcune fasi iniziali dell'evoluzione del Sole) provocherebbe il trasferimento di momento angolare dal Sole verso l'esterno.

6.3.4 Cenni storici; teorie monistiche (Kant–Laplace) e dualistiche (Jeans).

Le idee relative alla formazione del Sistema Solare si sono incanalate in due filoni principali: le teorie "monistiche" basate sull'idea di una origine comune per il Sole e i pianeti, da una struttura diffusa iniziale, e quelle "dualistiche" secondo le quali il Sole si è formato senza pianeti e i pianeti sono stati poi aggiunti in conseguenza di un processo secondario, legato in sostanza all'incontro ravvicinato con un altro oggetto. Il primo suggerimento di una nebulosa solare, cardine delle teorie monistiche, si deve a Cartesio; enunciazioni e sviluppi successivi sono presenti nelle opere di Swedenborg e di Kant, mentre Laplace (1796) dette al modello una trattazione scientifica più esauriente. La teoria nebulare, nella formulazione di Laplace, era sembrata incapace di spiegare l'anomala distribuzione del momento angolare ed era stata anche criticata da un punto di vista teorico per la difficoltà di formare condensazioni partendo da regioni anulari, a causa della rotazione differenziale. Invece negli ultimi decenni una sua versione (molto più raffinata) si è (forse) definitivamente affermata come lo scenario di base dei processi di formazione. Di questo parleremo nei prossimi paragrafi.

Le teorie dualistiche, partite dal francese Buffon (1745), e sviluppatesi nel periodo in cui l'ipotesi nebulare sembrava non funzionare, sono basate sull'idea che il Sole, nato senza pianeti, abbia avuto un incontro ravvicinato con un altro corpo celeste. La ingenua idea di Buffon, che potesse trattarsi di una cometa, è stata superata da Jeans, che ha proposto l'incontro fra due stelle, e più modernamente da Woolfson, che ha ipotizzato l'incontro con una protostella. In tutti i casi lo schema qualitativo è quello mostrato nella figura, tratta da un corso online di J.Schombert. Il modello della formazione tramite incontro o cattura, detto anche "catastrofico" spiega alcune caratteristiche del Sistema Solare, ma presenta diverse rilevanti difficoltà. Inoltre l'evento che ha dato origine al Sistema Solare sarebbe estremamente raro. L'abbandono definitivo di questo schema sembra quindi una probabile conseguenza della scoperta di un numero rapidamente crescente di sistemi planetari extrasolari. La teoria nebulare, in versione moderna, sembra al momento non avere concorrenti, a dispetto dell'esistenza di alcuni problemi tuttora aperti.

6.3.5 Modello nebulare moderno

Il disco –relativemente stabile– da cui si formano i pianeti dovrebbe essere il risultato finale dell'evoluzione di un disco di accrescimento, un tipo di struttura studiato teoricamente negli ultimi anni in diversi contesti.

D'altro canto strutture a disco circumstellari sono state osservate negli ultimi anni, e sono state spesso interpretate come progenitori di futuri sistemi planetari.

Sia le osservazioni sia la teoria dei dischi presentano grossi margini di incertezza. I dischi osservati hanno masse che variano da un millesimo della massa della stella centrale a valori non troppo inferiori a quest'ultima. I valori dei rapporti di massa si attestano frequentemente su qualche centesimo: un rapporto che sembrerebbe non troppo diverso da quello che potrebbe aver caratterizzato il disco primordiale relativo al Sistema Solare. Da un punto di vista teorico dischi troppo massicci soffrono problemi di instabilitá; secondo Pringle (1981) un disco di spessore h a distanza r dal centro è instabile se la sua massa M_d, in unità della massa della stella centrale, supera h/r. Una instabilità globale compare comunque quando $M_d > 0.3$ (Shu et al., 1990): in definitiva i dischi non possono essere troppo massicci, per sopravvivere a lungo. Ovviamente però non è questo il caso che ci interessa: vogliamo studiare dei dischi che siano il punto di partenza della formazione di un sistema planetario, il che richiede una sopravvivenza limitata all'avvio dei suddetti processi di formazione.

L'evoluzione dei dischi di accrescimento vede comunque una parte della loro massa cadere sulla stella. Nel tempo si ha un disco di massa crescente, che, in altri termini, accresce dall'esterno piu' materia di quella che poi riversa sulla stella, fino ad un massimo. Successivamente il disco comincia a perdere massa e si esaurisce progressivamente.

Altre caratteristiche rilevanti sono la divisione del disco in due parti, quella esterna, nella

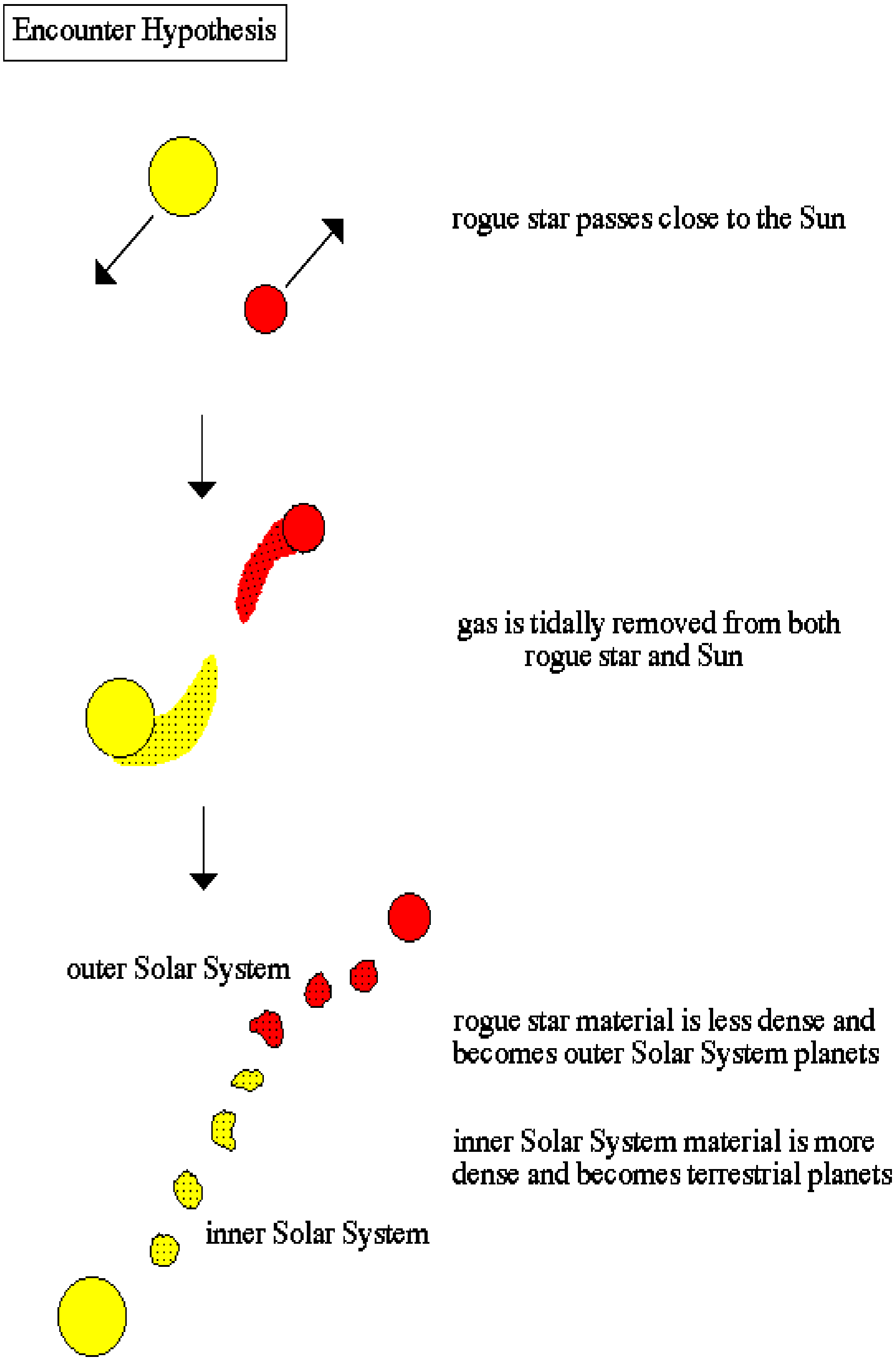

Figure 6.1: La formazione per “cattura” (da Schombert, lect.online, Univ. Oregon)

quale i moti sono di regola verso l'esterno, e quella interna, in cui invece la materia tende a cadere verso la stella. La distanza di separazione tra queste due zone tende a spostarsi, nel tempo, verso l'esterno.

Nel tempo la temperatura del disco tende a diminuire (su scala di un milione di anni o meno) e puó iniziare la coagulazione di particelle solide. Da questo momento in poi deve avere inizio la formazione planetaria (se del caso), prima che i grani abbiano tempo di spiralizzare verso l'interno e cadere sulla stella.

Due principali scuole di pensiero si dividevano, fino a qualche anno fa, nell'attribuire al disco protoplanetario una massa all'incirca uguale a quella del proto-Sole (modelli di Cameron, C) o dell'ordine di qualche centesimo della stessa (modelli alla Safronov, S).

Alcune considerazioni, che espliciteremo in seguito, hanno ormai fatto abbandonare i modelli con disco massiccio, almeno per quanto riguarda la formazione del Sistema Solare. È meno unanime l'accordo in merito alla formazione di sistemi extrasolari; secondo alcuni autori potrebbe esistere un doppio canale di formazione (v. Cap.7). A scopo didattico sarà in ogni caso utile mantenere il raffronto fra di essi, per chiarire meglio i fondamentali processi fisici coinvolti.

La differenza tra i due modelli diviene chiara se noi consideriamo il **momento angolare specifico** dei seguenti oggetti:

1. S_0 -il Sistema Solare attuale.
2. $S_{(S)}$ -il Sistema Solare con le stesse dimensioni e massa –al difuori del Sole– 50 volte maggiore dell'attuale ($M_{S.Sol} \sim M_\odot\, 1.001$, $M_{S.Sol} - M_\odot \sim 10^{-3} M_\odot$ e quindi $M_{disco}^{orig} \sim M_\odot 5\ 10^{-2}$).
3. $S_{(C)}$ -il Sistema Solare con le stesse dimensioni e massa del disco $\sim M_\odot$.
4. B_S -una binaria con $x = M_2/M_{tot} \sim 10^{-1}$ e $T \sim 10^2 y$ (binaria larga e sbilanciata).
5. B_G -una binaria con $x = .5$ e $T \sim 10y$ (binaria gemella).
6. N -una nube interstellare media (sulla base delle osservazioni).

Poichè per una binaria con $M_2 = xM$, $, M = M_\odot$ e T in secondi vale per il momento angolare specifico j:

$$j = 1.37 \cdot 10^{17} x(1-x) T^{1/3} \quad cm^2/s \tag{6.41}$$

usiamo $1.37 \cdot 10^{17}$ come unità di misura. Abbiamo allora:

Modello	S_0	$S_{(S)}$	$S_{(C)2}$	B_S	B_G	N
j	~ 1	~ 50	$\sim 10^3$	~ 120	~ 170	$\sim 10^6$

La tabella può essere commentata.

1. Esiste un gap di j fra la nube media e i sistemi binari o protoplanetari. Questo gap può essere superato tenendo in conto la possibilità di frammentazione (eventualmente anche in più passi), gli effetti dei jets ed altri possibili effetti d'insieme.

2. A seconda del modello S o C i sistemi planetari si collocano al disopra o al disotto dei sistemi binari.j è quindi il "parametro decisivo" nella scelta tra la formazione di una binaria e quella di un sistema planetario. Va però notato che nel caso S l'aumento di j provoca un regolare aumento della massa collocata nella seconda componente; nel caso C invece si balza avanti, dalle binarie sbilanciate a quelle gemelle, salvo poi rimbalzare indietro al 10^{-3} del Sistema Solare. Naturalmente questo rimbalzo è in qualche misura un artefatto delle ipotesi: anche nel processo di formazione di stelle doppie probabilmente c'è della materia in origine che si disperde successivamente. In sostanza, nei modelli di tipo C i processi di formazione di stelle doppie e quelli di formazione planetaria incidono sugli stessi livelli di momento angolare specifico, e questo richiede l'identificazione di altri parametri che possano determinare l'evoluzione del sistema.

Da un punto di vista fisico la principale difficoltà (almeno a questo punto) del modello S è l'esistenza di zone a j molto basso (ma sempre entro un ordine di grandezza rispetto alle binarie); tra le difficoltà del modello C c'é quella di dover poi disperdere il 999‰della massa del disco prima di formare i pianeti. Inoltre (e questa sembra una difficoltá ancora maggiore da superare) i dati chimici ci descrivono una robusta differenziazione anche tra la composizione dei pianeti giganti e quella solare, e non si capisce come questa possa aver avuto luogo, in un modello in cui, come vedremo, si formano inizialmente giganteschi nuclei planetari gassosi. Analogamente appare quasi impossibile prevedere un qualche ragionevole meccanismo per formare i pianeti terrestri e i numerosi corpi minori (asteroidi, comete, satelliti). Le precedenti considerazioni hanno di fatto causato un progressivo abbandono dei modelli "alla Cameron" negli ultimi anni, ed una attenzione ormai completamente concentrata sui modelli di tipo S.

6.4 Strumenti di analisi teorica dei processi di formazione: I- Le equazioni di Eulero e di Navier-Stokes.

In generale il problema del moto di un fluido può essere studiato definendo un campo di velocità

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \tag{6.42}$$

L'equazione del moto (v. Astrofisica, eq. 1.6), esplicitata e generalizzata

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} \tag{6.43}$$

viene alterata, nella <u>descrizione euleriana</u>; essendo

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

si ottiene infine **l'equazione di Eulero**:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} \tag{6.44}$$

Nella deduzione dell'equazione (6.44) non si è ovviamente considerata la possibilità di processi dissipativi che possono aver luogo in un fluido in movimento per effetto della viscosità e di *scambi di calore. Per l'introduzione dei fenomeni viscosi è utile riscrivere l'equazione di Eulero in forma tensoriale, usando anche l'equazione di continuità:*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{6.45}$$

A tale scopo calcoliamo la velocità di variazione della densità d'impulso:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v})$$

Con le usuali notazioni e convenzioni per gli indici ripetuti:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} \tag{6.46}$$

D'altro lato l'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + g_i \tag{6.47}$$

può essere inserita nella (6.46) dando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= -v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} - \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) - \delta_{ik}\frac{\partial P}{\partial x_k} + \rho g_i \end{aligned} \tag{6.48}$$

E' possibile quindi definire il **tensore di flusso d'impulso**

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k \tag{6.49}$$

La (6.48) prende la forma (che spiega anche il nome scelto):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_{ik} + \rho g_i \tag{6.50}$$

Se $\vec{g} = 0$, integrando sul volume:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int (\rho v_i) dV = -\int \frac{\partial}{\partial x_k}(\Pi_{ik})\, dV = \oint \Pi_{ik} df_k \tag{6.51}$$

La generalizzazione della (6.50) al caso viscoso può essere fatta aggiungendo al tensore Π_{ik} un termine $-\sigma'_{ik}$ che caratterizza il trasporto viscoso d'impulso, dovuto sostanzialmente ad attriti interni; σ'_{ik} deve essere nullo in presenza di moto uniforme di tutto il fluido; deve dipendere dalle derivate di v rispetto alla posizione, ed essere quindi formato da termini della forma $\partial v_i/\partial x_k$. Anche in caso di rotazione uniforme ($\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$) σ'_{ik} si deve annullare.

Il tensore più generale che soddisfa a queste condizioni è (v. [Landau,Lifchitz, Mechanique des Fluides, MIR Eds.]):

$$\sigma'_{ik} = a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + b\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik} \tag{6.52}$$

con a e b indipendenti dalla velocità. Si scrive però più frequentemente σ'_{ik} sotto la forma

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \tag{6.53}$$

dove il tensore fra parentesi ha traccia nulla. Le quantità η e ζ sono i **coefficienti di viscosità***, e sono sempre positivi.*

L'equazione del moto in presenza di viscosità si ottiene aggiungendo un termine della forma $\partial\sigma'_{ik}/\partial x_k$: abbiamo quindi

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \tag{6.54}$$

Se i coefficienti di viscosità η e ζ sono costanti o variano comunque lentamente con la posizione, è possibile porre:

$$\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta\frac{\partial}{x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \tag{6.55}$$

dove

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{v}, \qquad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} = \Delta v_i$$

e quindi la (6.52) può essere riscritta nella notazione vettoriale:

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) \tag{6.56}$$

*Per un fluido incompressibile $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$, e la (6.54) viene semplificata togliendo l'ultimo termine a destra, ed ottenendo l'***equazione di Navier-Stokes***; se $\vec{g} = 0$:*

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} - \vec{\nabla}p + \eta\Delta\vec{v} \tag{6.57}$$

La risoluzione delle equazioni (6.54) o (6.55) richiede ovviamente una accurata analisi delle condizioni al contorno. Non approfondiremo l'argomento in questa sede, rimandando a dei testi di meccanica dei fluidi (ad es. il libro di Landau e Liftchitz citato in precedenza).

6.5 Strumenti II: Il criterio di Jeans.

6.5.1 Il criterio semplice.

Passiamo ora a discutere il **criterio di Jeans**. Il criterio, elaborato all'inizio del '900, affronta il problema della formazione di instabilità gravitazionali in un mezzo omogeneo e isotropo. Come vedremo fra poco, esistono evidenti problemi di autoconsistenza, che ne limitano l'accuratezza, e che vengono superati appieno solo nelle generalizzazioni che se ne fanno in ambiente cosmologico, quando la gravità è descritta mediante le equazioni di Einstein. Ciò nonostante, la descrizione dei processi di instabilità mediante relazioni di dispersione, che questo tipo di analisi produce, è uno strumento potente per generalizzare l'analisi, tenendo conto di effetti diversi.

La condizione iniziale del sistema è quella di un mezzo infinito non viscoso in equilibrio ($\vec{v} = 0$), con pressione (P_0), densità (ρ_0) e potenziale gravitazionale (ϕ_0) costanti nello spazio; le ipotesi sono a rigore inconsistenti, dato che l'equazione di Poisson

$$\Delta\phi_0 = 4\pi G\rho_0 \tag{6.58}$$

essendo $\phi_0 = cost.$ implicherebbe $\rho_0 = 0$ (e questo caso non è ovviamente di alcun interesse fisico).

Ignorando le difficoltà, proseguiamo e perturbiamo le grandezze d'equilibrio:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{v_0} & \rightarrow & \vec{v_0} + \vec{v_1} = \vec{v_1} \\ P_0 & \rightarrow & P_0 + P_1 \\ \rho_0 & \rightarrow & \rho_0 + \rho_1 \\ \phi_0 & \rightarrow & \phi_0 + \phi_1 \end{array} \right\} \tag{6.59}$$

ed usiamo le equazioni del moto, di continuità e di Poisson:

$$\rho\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\rho\,\vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla}P - \rho\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} \tag{6.60}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \tag{6.61}$$

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{6.62}$$

Essendo poi:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} & = & \frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} \\ \vec{\nabla}P & = & \vec{\nabla}P_1 \\ \vec{\nabla}\phi & = & \vec{\nabla}\phi_1 \end{array} \right\} \tag{6.63}$$

si ha al primo ordine

$$\begin{array}{rcl} (\rho_0+\rho_1)\,\dfrac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} & = & -(\rho_0+\rho_1)\,\vec{\nabla}\phi_1 - \vec{\nabla}P_1 \\ & \Rightarrow & \\ \rho_0\,\dfrac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} & = & -\rho_0\vec{\nabla}\phi_1 - \vec{\nabla}P_1 \end{array} \tag{6.64}$$

Analogamente:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial\rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla}\left[(\rho_0+\rho_1)\vec{v}_1\right] & = & 0 \\ & \Rightarrow & \\ \dfrac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_0\,\vec{\nabla}v_1 & = & 0 \end{array} \tag{6.65}$$

$$\Delta\phi_1 = 4\pi G\rho_1 \tag{6.66}$$

Ammettiamo che la perturbazione sia isoterma:

$$P_1 = \frac{KT}{2m_p}\rho_1 = c^2\rho_1 \tag{6.67}$$

(dove c é la velocitá del suono; altrove anche c_s) e della forma:

$$\begin{array}{rcl} \vec{v}_1 & = & \vec{v}_{10}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ P_1 & = & P_{10}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \end{array}$$

e quindi

$$\begin{array}{rcl} \rho_1 & = & \rho_{10}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ \phi_1 & = & \phi_{10}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \end{array}$$

Dalla (6.64) si ottiene

$$-\rho_0\, i\omega\vec{v}_1 = -\rho_0\, i\vec{k}\phi_1 - c^2\, i\vec{k}\rho_1$$

e quindi

$$\omega\rho_0\vec{v}_1 = \vec{k}\,(c^2\rho_1 + \rho_0\phi_1) \tag{6.68}$$

Dalla (6.68) risulta che $\vec{k} \parallel \vec{v}_1$, mentre dalla (6.65) si ottiene

$$-i\omega\rho_1 + i\vec{k}\cdot\rho_0\vec{v}_1 = 0$$

ossia

$$\vec{k}\cdot\vec{v}_1 = \omega\,\frac{\rho_1}{\rho_0} \tag{6.69}$$

La (6.66) infine si può scrivere nella forma:

$$-k^2\phi_1 = 4\pi G\rho_1$$

ossia:

$$\phi_1 = -\frac{4\pi G\rho_1}{k^2} \tag{6.70}$$

La (6.70) nella (6.68) dà:

$$\omega\rho_0\vec{v}_1 = \vec{k}c^2\rho_1 - \vec{k}\rho_0\frac{4\pi G\rho_1}{k^2} \tag{6.71}$$

moltiplicando scalarmente per $\vec{k}$ e dividendo per ρ_1 si ha:

$$\omega\rho_0 \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{k}}{\rho_1} = k^2 c^2 - 4\pi G \rho_0 \tag{6.72}$$

e ricordando la (6.69) si ottiene infine la **relazione di dispersione**:

$$\omega^2 = k^2 c^2 - 4\pi G \rho_0 \tag{6.73}$$

Se $k^2c^2 > 4\pi G\rho_0$ $\omega^2 > 0$ e si hanno oscillazioni delle grandezze perturbate; se invece $k^2c^2 < 4\pi G\rho_0$ $\omega^2 < 0$ ω è immaginario: esiste quindi una soluzione crescente esponenzialmente. La condizione $\omega^2 < 0$ definisce quindi il **criterio di stabilità di Jeans** in termini del vettore d'onda k_J:

$$k < k_J = \sqrt{4\pi G \rho_0 \frac{2m_p}{KT}} \tag{6.74}$$

ed essendo la lunghezza d'onda di una perturbazione (λ) definita come $\lambda = 2\pi/k$, la (6.74) ci dice che sono instabili le perturbazioni con lunghezza d'onda

$$\lambda > \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \left[\frac{\pi KT}{G\rho_0 2m_p}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.75}$$

La più piccola massa che può collassare sarà quindi:

$$\begin{aligned} M &= M_J = \frac{4}{3}\pi\rho_0 \left(\frac{\lambda_J}{4}\right)^3 = \frac{\pi}{6}\rho_0 \left[\frac{\pi KT}{G\rho_0 8m_p}\right]^{\frac{3}{2}} = \\ &= CT^{3/2}/\rho_0^{1/2} \end{aligned} \tag{6.76}$$

con $C = costante$.

È facile rendersi conto che il criterio di Jeans ritrova, a meno di coefficienti non molto diversi dall'unità, la condizione per l'inizio del collasso (6.6). Si può anche notare come, in base a considerazioni dimensionali e alla generale validità dei tempi scala tipici dei processi dinamici (si vedano per es. le lezioni del Corso di Astrofisica) $\lambda_J \sim ct_{ff}$.

Ma il criterio di Jeans è, almeno in linea di principio, più potente, in quanto prevede che, se la temperatura diventa molto minore di quella necessaria a garantire l'equilibrio (o quasi) iniziale, oltre al collasso globale del sistema possono anche avviarsi processi di collasso di parti, che potrebbero condurre a fenomeni di **frazionamento**. Lo stesso potrebbe accadere anche nelle fasi successive, quando ρ aumenta e T resta più o meno costante, causando quindi la progressiva diminuzione di M_J.

La nube potrebbe in sostanza subire processi di progressivo frazionamento, che avrebbero termine solo quando la temperatura del gas ricomincia ad aumentare. La presenza di rotazione, o eventualmente anche di campi magnetici e turbolenza, complica sensibilmente il discorso.

In realtà, anche in assenza di rotazione, campi magnetici e turbolenza, la situazione non è affatto semplice; a parte l'inconsistenza delle condizioni iniziali, l'avvio dello sviluppo delle sottocondensazioni in un ambiente già in rapido collasso può non avvenire del tutto –a meno, ovviamente, che le sottcondensazioni siano fin dall'inizio presenti nel sistema– ed è comunque molto probabile una loro successiva coalescenza nella massa complessivamente collassante.

6.5.2 Interpretazione elementare del criterio di Jeans.

La relazione di dispersione (6.73) che può anche essere scritta nella forma:

$$\omega^2 = k^2 c^2 - \Omega_J^2 \tag{6.77}$$

permette una semplice interpretazione fisica, sulla base della relazione qualitativa:

$$c_s^2 \sim E/m \sim P/\rho. \tag{6.78}$$

Per esempio nel caso limite $\omega \sim 0$ si ritrova essenzialmente il teorema del viriale:

$$c_s^2 \sim 4\pi G\rho_0/k^2 \sim 4\pi G\rho_0\lambda^2 \sim GM/r \tag{6.79}$$

.

Sulla base di questa semplice lettura della relazione di dispersione diventa immediato inserire nella stessa diversi effetti perturbativi. Si noti comunque che la cosa può anche essere fatta in modo più sistematico e rigoroso; le relazioni che andremo a ricavare in modo euristico saranno anche ottenibili sulla base di più complessi calcoli effettuati sulla falsariga di quelli con cui abbiamo dedotto il criterio di Jeans. Notiamo anche l'analogia fra la "frequenza di Jeans" Ω_J e la "frequenza di plasma" (data da una espressione simile, in cui la carica sostituisce ovviamente la massa), nota in altri contesti.

6.5.3 Generalizzazioni: l'effetto della turbolenza.

L'effetto sostanziale della turbolenza è in questo contesto quello di aumentare l'energia cinetica disordinata presente nel sistema. In sintesi possiamo utilizzare ancora le solite espressioni facendo però la sostituzione:

$$c_s^2 \to c_s^2 + v_{turb}^2 \tag{6.80}$$

dove v_{turb} è la velocità caratteristica (e media) dei moti turbolenti. Di conseguenza cambiano

$$k_J = \Omega_J/\sqrt{c_s^2 + v_{turb}^2} \tag{6.81}$$

e

$$\lambda_J = (2\pi/\Omega_J)\sqrt{c_s^2 + v_{turb}^2}. \tag{6.82}$$

Se v_{turb} domina il termine termico c_s si ha anche:

$$M_J^{turb} \propto \rho\lambda_J^3 \propto \rho\rho^{-3/2}v_{turb}^{3/2} = v_{turb}^{3/2}/\sqrt{\rho} \tag{6.83}$$

Secondo queste considerazioni la turbolenza avrebbe un ruolo di frenaggio dei processi di collasso. In effetti essa può anche, come già detto, giocare un ruolo opposto, creando disomegeneità che possono essere l'innesco della contrazione.

6.5.4 L'effetto dei campi magnetici.

Anche il campo magnetico può esercitare un ruolo di parziale inibizione del collasso e del frazionamento.

In particolare la pressione del campo magnetico si aggiunge a quella del gas:

$$P_G \to P_G + P_{MAG} \tag{6.84}$$

Seguendo la traccia dell'esempio precedente, si può vedere l'effetto del campo magnetico come una correzione:

$$c_s^2 \to c_s^2 + B^2/(4\pi\rho_0) \tag{6.85}$$

da cui conseguono:

$$\lambda_J = 2\pi/\Omega_J\sqrt{c_s^2 + B^2/4\pi\rho_0}. \tag{6.86}$$

e

$$M_J \propto \rho\Omega_J^{-3}(c_s^2 + B^2/4\pi\rho_0)^{3/2} \tag{6.87}$$

Se la pressione magnetica domina:

$$M_J^B \propto \rho\ \rho^{-3/2}B^3\rho^{-3/2} \propto B^3/\rho^2 \tag{6.88}$$

È interessante il caso in cui il campo magnetico è "congelato" nella materia collassante. Perchè ciò si verifichi occorre una adeguata conducibilità elettrica della materia, che si può avere in presenza di un certo grado di ionizzazione (qui per es. dovuta ai raggi cosmici). Si ha allora, in base alla conservazione del flusso magnetico ($\phi = Br^2$), $B \propto \rho^{2/3}$ e quindi

$$M_J^B = const. \tag{6.89}$$

Per nubi molecolari giganti e rarefatte, in presenza di un campo magnetico galattico di $10^{-5} - 10^{-6}G$, l'effetto del campo magnetico diventa rilevante.

Il discorso deve però essere raffinato per tenere conto di due aspetti:

1. Lo scongelamento del campo magnetico, dovuto ad effetti di "diffusione ambipolare", in pratica fenomeni di distacco tra le particelle cariche e la materia neutra, che collassa indisturbata traversando le linee di forza, cosicchè $B \propto \rho^q \quad q < 2/3$; la diffusione ambipolare è fortemente favorita da un basso grado di ionizzazione.

2. Il fatto che il campo magnetico non può essere trattato come un effetto di pressione tout-court; il passaggio di materia in fase di collasso può avvenire sia lungo le linee di forza del campo che attraverso esso. I relativi effetti del campo sul collasso sono nei due casi diversi. Il campo magnetico ha quindi un ruolo più di rottura della simmetria che di ostacolo al collasso.

Nella sostanza l'importanza del campo magnetico sembra essere significativa ma non decisiva.

6.5.5 L'effetto della rotazione uniforme.

In presenza di rotazione uniforme (caratterizzata da una velocità angolare Ω intorno ad un asse fisso) il collasso gravitazionale **sul piano perpendicolare all'asse** sarà ostacolato dalla differenza di velocità legata alla rotazione:

$$\delta v \sim \Omega\lambda \sim \Omega/k \tag{6.90}$$

per cui:

$$c_s^2 \to c_s^2 + \Omega^2/k^2 \tag{6.91}$$

La condizione di instabilità sarà allora espressa mediante la relazione di dispersione modificata con l'aggiunta di un termine "centrifugo":

$$\omega^2 = c_S^2 k^2 + \Omega^2 - \Omega_J^2 \leq 0 \tag{6.92}$$

La relazione di dispersione differisce da quella usuale per la sostituzione

$$\Omega_J^2 \to \Omega_J^2 - \Omega^2 \tag{6.93}$$

da cui conseguono i nuovi valori di

$$\lambda_J = 2\pi c_s/\sqrt{4\pi G\rho_0 - \Omega^2} \tag{6.94}$$

e

$$M_J \propto \rho c_s^3/(4\pi G\rho_0 - \Omega^2)^{3/2} \tag{6.95}$$

Le equazioni precedenti dimostrano che la rotazione non solo aumenta la massa di Jeans (almeno per l'avvio del collasso sul piano di simmetria del sistema) ma crea una condizione supplementare, legata al segno dell'espressione dentro parentesi. La cosa può anche essere intepretata in modo elementare. Facciamo l'ipotesi che i corpi che stiamo studiando omogenei e isotropi (ipotesi ovviamente falsificata dalla presenza di rotazione, e che quindi possiamo considerare solo come approssimazione). L'energia di legame di un corpo di massa M e raggio R, in rotazione con velocità angolare uniforme Ω è:

$$U = -3GM^2/5R \tag{6.96}$$

mentre l'energia rotazionale sarà:

$$E_{rot} = 1/5MR^2\Omega^2. \tag{6.97}$$

Usando la definizione di β data precedentemente, e tenendo conto della relazione $M = 4/3\pi\rho_0 R^3$ si ha anche:

$$\beta = E_{rot}/U = 1/3R^3\Omega^2/GM = \Omega^2/\Omega_J^2. \tag{6.98}$$

Più correttamente sarà (tenendo conto delle approssimazioni fatte):

$$\Omega^2 = \chi\beta\Omega_J^2 \tag{6.99}$$

dove $\chi \sim 1$. Si potrà allora scrivere, per esempio:

$$M_J(\beta) = M_J(0)/(1-\chi\beta)^{3/2}. \tag{6.100}$$

Valgono ovviamente le stesse considerazioni fatte precedentemente in merito alla asimmetria introdotta dalla rotazione.

6.5.6 L'effetto della rotazione non uniforme.

La generalizzazione del criterio di Jeans può essere estesa al caso di rotazione differenziale.

Si potrebbe dimostrare (si veda ad es. [Bertotti e Farinella, op. cit.]) che in generale la relazione di dispersione prende la forma:

$$\omega^2 = c_S^2 k^2 - \Omega_J^2 + \frac{2\Omega}{r}\,\frac{d(\Omega r^2)}{dr} \tag{6.101}$$

che, mediante la (3.51) (dove chiamiamo n quello che qui è Ω) e la definizione di frequenza epiciclica κ data nel Cap.3 può essere espressa anche nella forma (v. [1]):

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - \Omega_J^2 + \kappa^2 \tag{6.102}$$

Per semplicità, limitiamoci ad analizzare in modo semplificato il caso della rotazione differenziale dovuta al moto "kepleriano" intorno ad una massa centrale. Seguendo la traccia del calcolo fatto per rotazione uniforme, avremo una differenza di velocità:

$$\Delta v \propto (1/\sqrt{r} - 1/\sqrt{r+\lambda}) \propto \lambda r^{-3/2} \sim \omega_{kepl}/k \tag{6.103}$$

da cui si ricava la relazione di dispersione:

$$\omega^2 = c_S^2 k^2 - \Omega_J^2 + \omega_{kepl}^2 \tag{6.104}$$

e quindi, per esempio:

$$\lambda_J = 2\pi c_s / \sqrt{4\pi G\rho_0 - \omega_{kepl}^2} \tag{6.105}$$

Ancora una volta l'instabilità richiede che il termine sotto radice debba essere positivo, e quindi:

$$4\pi G\rho_0 > GM_*/r^3 \tag{6.106}$$

dove M_* è la massa della struttura centrale ("stella") che genera il campo e quindi causa il moto kepleriano.

Il risultato permette di dedurre un (molto approssimativo) "limite di Roche", esprimendo M_* in funzione della sua densità ρ_* e del suo raggio R_*:

$$r > R_*(\rho_*/(3\rho_0))^{1/3} \tag{6.107}$$

È anche interessante notare che la condizione (6.105) diventa:

$$4\pi\rho_0 r^3 > M_* \tag{6.108}$$

e che se la nube in moto kepleriano può essere vista come approssimativamente sferica la sua massa è $M_{nube} \sim 4/3\pi\rho_0 r^3$ e quindi otteniamo:

$$M_{nube} > M_*/3. \tag{6.109}$$

Il "limite di Roche" è stato discusso nel Cap.3 per capire quando un satellite tenuto insieme dalle forze gravitazionali sta per rompersi, ma può essere naturalmente applicato anche come condizione **necessaria** perchè una condensazione autogravitante possa svilupparsi. Dai calcoli fatti nel Cap. 3 si ottiene una condizione (approssimata) che lega le masse dei satelliti e del corpo centrale, per garantire la stabilità:

$$\frac{m}{M} \geq 12 \left(\frac{\delta}{r}\right)^3 \tag{6.110}$$

Se passiamo a discutere il caso della formazione delle strutture nel disco protoplanetario, possiamo pensare alla massa m come a quella di un elemento di materia che sta cercando di formare un embrione protoplanetario. Possiamo definire:

$$M = \rho_\odot \frac{4}{3}\pi R_\odot^3 \tag{6.111}$$

e

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho\delta^3 \tag{6.112}$$

La condizione precedente diventa equivalente a porre

$$\frac{\rho\delta^3}{\rho_\odot R_\odot^3} \geq 12\frac{\delta^3}{r^3} \tag{6.113}$$

ossia, (rinominando $r = a$)

$$\rho \geq \rho_\odot 12 \left(\frac{R_\odot}{a}\right)^3 \tag{6.114}$$

Si noti che un modello più accurato darebbe invece

$$\rho \geq \left(\frac{1.44 R_\odot}{a}\right)^3 \rho_\odot \sim \frac{M_\odot}{a^3} \tag{6.115}$$

La condizione critica per la possibilità di formazione si ha in sostanza quando la densità iniziale nel disco supera quella che avrebbe il sole espanso ad occupare una sfera di raggio a: un risultato simile a quello ricavato dalla Eq. (6.109). Quantitativamente, per $a \sim a_{Giove} \quad \rho_{CR} \sim 4 \cdot 10^{-9} g/cm^3$.

Usando le considerazioni precedenti, e quelle che faremo nel par. 6.8.2, rappresentando il disco protoplanetario come un disco gassoso di spessore non trascurabile, di volume quindi non troppo minore di quello di una sfera di uguali dimensioni, è possibile dimostrare che, alla stessa distanza,

$$\rho(0) \sim (100q) \cdot 10^{-10} g/cm^3 \tag{6.116}$$

dove $M_{disco} = qM_{\odot}$. Nei modelli alla Safronov $q \sim 10^{-2}$ e $q(0) \ll \rho_{CR}$. Solo se $q \sim 1$ (modelli alla Cameron) le condizioni critiche sono verificate.

Discuteremo nel paragrafo 6.8 questo importante risultato e ne capiremo il significato per la definizione dei modelli di disco protoplanetario.

Il discorso fatto fin qui deve però ancora essere generalizzato per tener conto dello spessore del disco, che nei problemi di formazione planetaria può anche essere molto sottile, come vedremo meglio in seguito.

6.6 Strumenti III– Instabilità in un disco sottile.

6.6.1 Dal criterio di Jeans: caso di disco sottile

Come vedremo nei prossimi paragrafi, il problema della grande massa totale presente nel disco, necessaria per l'innesco delle instabilità, può essere superato prendendo in considerazione la possibilità che la componente "polverosa" della nebula primordiale possa sedimentare a formare un disco molto più sottile, in cui è piú facile il raggiungimento della densità critica. Diventa quindi interessante riprendere in esame il problema nell'ipotesi che il disco originario sia abbastanza o molto sottile.

È possibile cercare una estensione del criterio di Jeans.

Tra i casi discussi in precedenza c'è anche quello di un sistema in rotazione differenziale (kepleriana); si noti però che quel modello non prevede anche un gradiente del campo gravitazionale e quindi non si attaglia perfettamente al nostro problema. Nondimeno era stato già possibile ottenere un risultato simile al limite di Roche, ed è anche possibile estendere l'analisi *alla Jeans*, almeno in modo qualitativo, anche per tenere conto dello spessore finito del disco. In sostanza il criterio di Jeans porta, per il caso di disco spesso (ossia quando lo spessore del disco non vincola le caratteristiche strutturali ed evolutive del sistema), ad una condizione critica per la densità, che è quella che abbiamo discusso in precedenza. Se questa condizione viene soddisfatta, possono allora svilupparsi delle condensazioni sulla base di una relazione di dispersione.

Quale massa avranno queste condensazioni? Se l'instabilità avviene nel disco gassoso, formato prevalentemente di idrogeno molecolare, si possono usare i risultati precedenti (nell'ipotesi che la densità sia abbastanza superiore a quella critica, in modo che l'espressione sotto radice nella (6.105) non sia troppo diversa da $4\pi G\rho_0$) . Se ci mettiamo nella zona di Giove, e ammettiamo che la temperatura sia dell'ordine di $100K$, la relazione massa–densità sarà simile alla (6.9) con un coefficiente moltiplicato per un fattore 10^3. Infatti dalla (6.76) si vede che la massa di Jeans scala con $(T/m_p)^{3/2}$ e quindi aumentare la temperatura da 10 a $100K$ implica questa variazione del coefficiente a moltiplicare $(M/M_{\odot})^2$. In altri termini per questa temperatura l'instabilità di una massa solare si avrebbe intorno a $10^{-15}g/cm^3$. Poichè la massa di Jeans scala con la radice quadrata della densità, a densità dell'ordine dei $10^{-9}g/cm^3$, come quella critica (vedi il paragrafo precedente) corrisponderà quindi una massa di Jeans dell'ordine di un millesimo della massa del Sole (vale a dire la massa di Giove). Le condensazioni alla Jeans che nascono dal disco gassoso sono quindi molto massicce, e sembrano dover portare alla formazione di pianeti giganti. Se pensiamo però a instabilità che coinvolgano la componente polverosa – ipotesi il cui grande interesse sarà dimostrato nel prossimo paragrafo– dobbiamo prendere come massa tipica delle particelle un valore $m_{polv} \sim 10^{-12}g$ (o qualcosa del genere). Per questo effetto la massa di Jeans diminuisce di ben 18 (!!) ordini di grandezza, e diventa quella di un corpo solido più piccolo di un centinaio di metri. Diventa allora interessante studiare soprattutto la crescita di instabilità piú grandi e capire se lo spessore finito del disco non possa introdurre una limitazione superiore.

In effetti è così. Si può argomentare che la massima massa di una condensazione (o "planetesimo" – useremo il suffisso "pl") è quella in cui la lunghezza d'onda diventa dello stesso ordine di grandezza dello spessore del disco (H); è questo un argomento qualitativo che serve ad estendere il modello isotropo delle instabilità alla Jeans a un caso a simmetria assiale. Se la densità è dello stesso ordine di ρ_{crit} si ha allora:

$$m_{pl} \leq H^3 \rho_{crit} \tag{6.117}$$

Se il disco è sottile, da semplci considerazioni geometriche si può concludere che, a livello di ordine di grandezza,

$$M_{disco} \sim M_{\odot} H/a \tag{6.118}$$

da cui

$$m_{pl} \leq (M_{disco}/M_{\odot})^3 a^3 \rho_{crit} \sim (M_{disco}/M_{\odot})^3 M_{\odot} \tag{6.119}$$

Come vedremo, nei modelli "alla Safronov" la massa del *disco di polvere* è dell'ordine di $10^{-4} M_{\odot}$. Ne risultano planetesimi di massa $\sim 10^{21} g$, corrispondenti a condensazioni solide dell'ordine di qualche decina di chilometri.

6.6.2 Modello semplice: leggi di conservazione in un disco molto sottile

Un risultato abbastanza simile si ottiene nell'ambito di un modello qualitativamente diverso (in sostanza bidimensionale) particolarmente adatto per il caso di un disco molto sottile, e uguale a quello discusso nel Cap.3 a proposito di anelli planetari. Studiamo questo caso sia come utile esercizio per capire i problemi in termini di fondamentali leggi di conservazione, sia anche per superare una possibile obiezione. Se la sedimentazione in disco molto sottile portasse la densità a superare nettamente il valore critico, a parità di massa del disco e quindi a parità di densità superficiale $\sigma = \rho H$, la massa dei frammenti calcolati secondo il criterio di Jeans diminuirebbe per un fattore $\rho/\rho_{crit}{}^{1/2}$. Ma in questo caso potrebbero anche aversi delle instabilità bidimensionali, per esempio tali da formare prima degli anelli sottili e poi, mediante rottura di questi, dei frammenti protoplanetari (instabilità di questo tipo sono state studiate in letteratura).

Introduciamo quindi un modello di disco "freddo" e sottile, in cui tutte le particelle percorrono orbite kepleriane circolari, e verifichiamo il ruolo centrale delle leggi di conservazione di energia (E) e momento angolare (L).

Si vuole studiare l'evoluzione di un anello a distanza minima r_0 dal Sole e largo δr (che si assume relativamente piccolo, in modo da rendere ragionevoli degli sviluppi in serie e l'ipotesi di densità costante nella zona). I calcoli sono già stati sviluppati nel Cap.3.

Ricordiamo che l'applicazione delle leggi di conservazione di momento angolare ed energia porta a definire due distanze finali dell'anello, diverse fra di loro:

$$\frac{R_L}{R_E} \sim 1 + \left(\frac{\delta r}{4r}\right)^2 \tag{6.120}$$

Questo fa sì che la condensazione porti a dover superare un gap di energia

$$\Delta E \sim -\frac{GM_\odot m_r}{r}\left[\left(\frac{\delta r}{4r}\right)^2_f - \left(\frac{\delta r}{4r}\right)^2_{in}\right] \sim \frac{GM_\odot m_r}{r}\left(\frac{\delta r}{4r}\right)^2_{in} \tag{6.121}$$

L'energia che si può recuperare è quella gravitazionale dovuta alla cambiata struttura dell'anello):

$$\Delta E_{grav} \sim \frac{Gm_r^2}{r} \tag{6.122}$$

Ciò resta vero anche per anelli sufficientemente stretti e sottili, pur di non avvicinarsi troppo a casi singolari.

Per l'instabilità deve essere

$$\Delta E_{grav} \geq \Delta E \tag{6.123}$$

cioè

$$\frac{Gm_r^2}{r} \geq \frac{GM_\odot m_r}{r}\left(\frac{\delta r}{4r}\right)^2 \tag{6.124}$$

ossia

$$\frac{m_r}{M_\odot} \geq \left(\frac{\delta r}{4r}\right)^2 \tag{6.125}$$

Essendo d'altra parte

$$m_r \sim 2\pi r\langle\rho(r)\rangle H\Delta r \tag{6.126}$$

ossia

$$\delta r \sim \frac{m_r}{2\pi r\langle\rho\rangle H} \tag{6.127}$$

si ha

$$m_r - M_\odot\frac{m_r^2}{64\pi^2 r^4\langle\rho\rangle^2 H^2} \geq 0 \tag{6.128}$$

e quindi

$$m_r < \frac{64\pi^2 r^4\langle\rho\rangle^2 H^2}{M_\odot} \tag{6.129}$$

Approssimativamente

$$m_r \leq \frac{M^2_{disco}}{M_\odot} \tag{6.130}$$

Per un disco di polvere

$$m_r < 10^{-8} M_\odot \sim 10^{25} g \tag{6.131}$$

Un anello sottile può essere instabile per perturbazioni "azimutali" (che cioè producano un alternarsi di condensazioni e rarefazioni lungo la circonferenza). In tal caso l'anello si spezzerà in tante sottocondensazioni. Nell'ambito di un modello bidimensionale, quale quello che stiamo considerando, è abbastanza naturale pensare a tante condensazioni circolari, di diametro uguale alla larghezza del disco: avremo quindi presumibilmente, a meno di coefficienti non troppo diversi dall'unità, compreso, in questo caso, un fattore 2π, una relazione del tipo $m_{pl} \sim m_r(\delta r/r)$.

Avremo quindi:

$$m_{pl} \sim \frac{m_r}{M_{disco}}\, m_r \tag{6.132}$$

da cui si trova ancora un valore simile a quello ottenuto dalla (6.119).

6.6.3 Il criterio di Toomre.

Le considerazioni fatte in precedenza ci fanno capire come, in un disco sottile in moto kepleriano, le instabilità siano limitate inferiormente in base a un criterio che è sostanzialmente quello di Jeans (le condensazioni devono essere abbastanza grandi perchè la autogravitazione possa superare i termini di pressione) ma anche superiormente. La stabilizzazione dei "modi" di grande lunghezza d'onda risulta anche dalla analisi più sofisticata che si può fare usando il **criterio di Toomre** (1964).

Lo studio delle instabilità in un disco sottile si può impostare ripercorrendo la strada usata per il criterio di Jeans, ma ragionando in due dimensioni. La densità ρ è qui sostituita dalla densità superficiale σ. Con calcoli analoghi a quelli precedenti (per una trattazione che analizza un sistema a due componenti si veda Jog e Solomon,1984, ApJ 276,114) si ottiene una relazione di dispersione:

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 2\pi G \sigma |k| + \kappa^2 \tag{6.133}$$

dove κ è ancora la frequenza epiciclica (v. ad es. la eq. 6.101) Pressione e rotazione stabilizzano rispettivamente lunghezze d'onda piccole e grandi. Si ha instabilità quando:

$$Q = \frac{\kappa c_s}{\pi G \sigma} < 1 \tag{6.134}$$

(criterio di Toomre, ApJ 139,1217, 1964) o anche se:

$$\sigma > \sigma_c = \frac{\kappa c_s}{\pi G} \tag{6.135}$$

Quando siamo nella condizione limite l'instabilità riguarda solo una lunghezza d'onda. Nelle regioni instabili si ha un range crescente –all'allontanarsi dalla condizione limite– di lunghezze d'onda interessate dalla crescita della perturbazione. Piccole differenze nei risultati si hanno fra dischi infinitamente sottili e dischi sottili ma di spessore finito. Il criterio di Toomre e le sue derivazioni, molto usati in problemi di dinamica galattica, sono stati confermati anche da simulazioni numeriche.

6.7 Strumenti IV: Corpi autogravitanti in rotazione.

Per motivi di semplicità pratica, riprendiamo dagli appunti di Astrofisica la discussione delle caratteristiche dei corpi autogravitanti in rotazione.

Un corpo in rotazione non avrà più forma sferica. Un corpo fluido in rotazione può essere caratterizzato dal parametro

$$u = \frac{\omega^2 R^3}{GM} \tag{6.136}$$

che sarebbe uguale al rapporto fra forza centrifuga equatoriale e forza peso se il corpo fosse sferico, e vicino anche al rapporto fra energia rotazionale e gravitazionale.

Infatti per un corpo sferico omogeneo

$$E_{rot} = \frac{1}{5} M R^2 \omega^2$$

$$E_{grav} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

e quindi

$$\frac{E_{rot}}{E_{grav}} = \frac{1}{3} \frac{\omega^2 R^3}{GM} = \frac{1}{3} u \tag{6.137}$$

Se il corpo è omogeneo:

$$u = \frac{\omega^2}{\frac{4}{3}\pi G\rho} = \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{\pi G\rho} \tag{6.138}$$

In effetti, per rotazione non eccessivamente rapida, la forma del corpo rotante è quella di un ellissoide biassiale, con l'asse minore lungo l'asse di rotazione, semiassi a e b ed eccentricità e (fig. 6.2):

$$b = a\left(1 - e^2\right)^{1/2} \tag{6.139}$$

Per trovare la forma si può usare l'argomento classico di Newton basato sulla condizione di equilibrio di due colonne di fluido, una polare ed una equatoriale, connesse al centro della Terra, e sul fatto che $g \propto r$ lungo un raggio per un corpo omogeneo.

Si ottiene

$$\frac{1}{2} a g_{eq} (1 - u) = \frac{1}{2} b g_{polo} \tag{6.140}$$

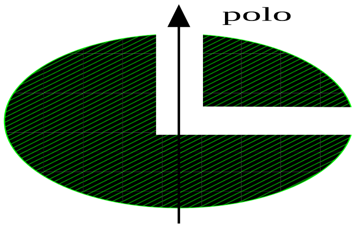

Figure 6.2: ellissoide di rotazione.

ossia

$$a g_{eq} - a^2\omega^2 = g_{polo}\, a \sqrt{(1-e^2)}$$

e quindi:

$$\omega^2 = \frac{1}{a}\left[g_{eq} - g_{polo}\sqrt{(1-e^2)}\right] \tag{6.141}$$

Per un ellissoide di rotazione omogeneo, come fu già dimostrato da Mc Laurin:

$$g_{eq} = 2\pi G\rho a\,\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e^3}\,\left[\arcsin e - e\sqrt{(1-e^2)}\right] \tag{6.142}$$

$$g_{polo} = 4\pi G\rho a\,\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e^3}\,\left[e - \sqrt{(1-e^2)}\arcsin e\right] \tag{6.143}$$

da cui:

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{\pi G\rho} &= \left[2\,\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e^3}\arcsin e - 2\,\frac{1-e^2}{e^2} - \frac{4\,(1-e^2)}{e^2} + 4\,\frac{\sqrt{(1-e^2)^3}}{e^3}\arcsin e\right] = \\ &= 2\arcsin e\,\frac{\sqrt{(1-e^2)}\,(3-2e^2)}{e^3} - \frac{6}{e^2}\left(1-e^2\right)\end{aligned} \tag{6.144}$$

Sviluppando in serie, per piccoli valori di e:

$$\frac{\omega^2}{\pi G\rho} \sim \frac{5}{6}\,e^2 \tag{6.145}$$

Il comportamento per e qualsiasi è schematizzato nella fig. 6.3.
Definendo lo schiacciamento ai poli:

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_{eq} - R_{polo}}{R_{eq}} = 1 - \sqrt{(1-e^2)} \sim \frac{e^2}{2} \tag{6.146}$$

si ritrova la relazione di Newton, per rotazione non troppo veloce:

$$\epsilon \simeq \frac{4}{5}\,u \tag{6.147}$$

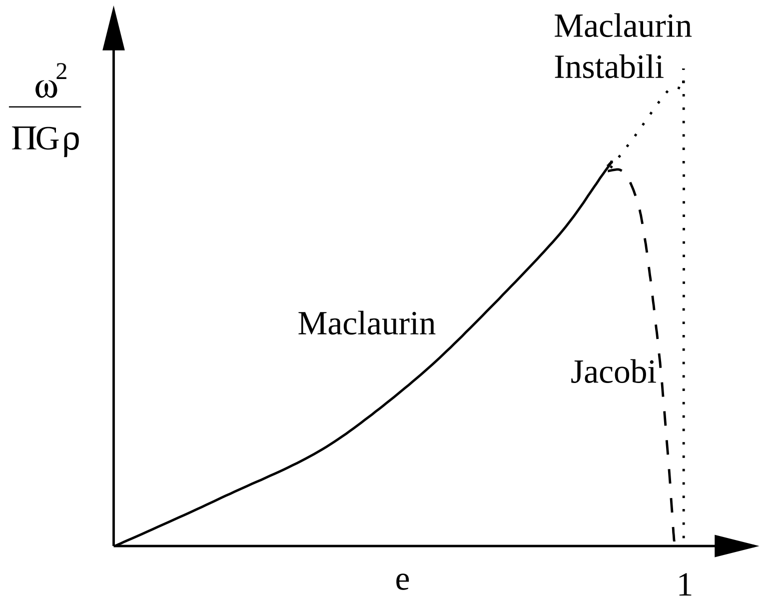

Figure 6.3: figure di equilibrio.

La sequenza si arresta a $\omega^2/\pi G\rho \simeq 0.449$ *ed* $e \simeq 0.93$*; ma già per* $\omega^2/\pi G\rho \simeq 0.374$ *ed* $e \simeq 0.8127$ *la sequenza di Mc Laurin diventa instabile per deformazioni triassali. Le figure di equilibrio stabile diventano ora ellissoidi triassali ("ellissoidi di Iacobi") di maggior momento di inerzia, per i quali all'aumentare del momento angolare* ω *diminuisce. Per rotazione ancora più veloce* ($E_{rot}/E_{grav} \geq .25$) *si arriva alla fissione.*

I risultati sono qualitativamente generalizzabili in molti casi (es. sistemi non omogenei ecc.). La relazione fra ω *e momento angolare per varie figure d'equilibrio è schematizzata in Fig. 6.4.*

Maggiori dettagli possono essere trovati in [Chandrasekhar, Ellipsoidal Figures of Equilibrium].

6.8 Inizio dei processi di formazione planetaria: il disco primordiale e i planetesimi.

6.8.1 Il disco "minimale".

Come abbiamo detto, diversi modelli teorici prevedono una massa molto differente del disco protoplanetario, ovviamente sempre più grande della somma delle masse planetarie.

Le osservazioni non sono ovviamente in grado di fornire un limite superiore alla massa primordiale, non essendo definiti i meccanismi di perdita di massa. Sono invece in grado di suggerire una limitazione inferiore, e quindi di definire un disco "minimale". L'argomento (Weidenschilling, 1977) è molto semplice. Si fa l'ipotesi (molto ragionevole) che la composizione iniziale del disco sia uguale a quella solare, con ben precisi rapporti fra le abbondanze. Si fa l'ipotesi che ogni pianeta si sia formato in un anello del disco iniziale, e che la massa di questo

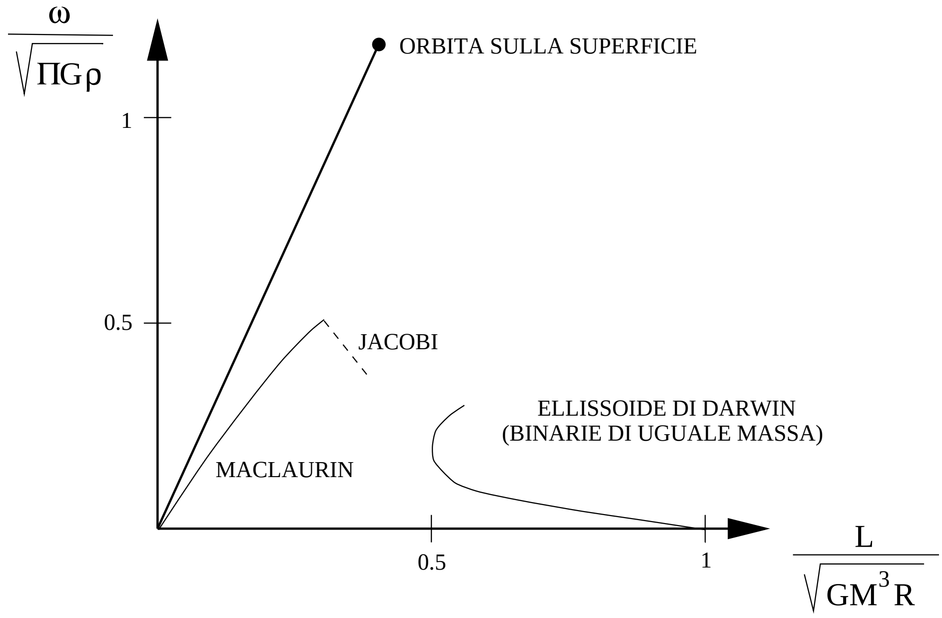

Figure 6.4: relazione $\omega - L$ per diverse figure di equlibrio.

anello sia data dalla massa del pianeta corretta per ristabilire le giuste abbondanze. Per esempio la massa di Giove e Saturno, che hanno una composizione non troppo diversa da quella solare ma con una abbondanza assai maggiore di “metalli” (elementi più pesanti dell’elio) –specialmente per Saturno– deve essere corretta di un fattore $\simeq 10$; quella di Urano e Nettuno di un fattore $\simeq 50$; quelle dei pianeti terrestri di un fattore molto grande, dell’ordine di 300. Se si fa l’ipotesi che i pianeti siano oggi dove si sono formati, escludendo processi di migrazione (l’ipotesi può essere accettata solo come una prima approssimazione –v. par. 6.11), si può anche “fittare” l’andamento della densità con la distanza. Per la densità superficiale si ottiene una relazione [1]:

$$\sigma(r) \simeq (\frac{r}{8\ 10^{13} cm})^{-3/2} g/cm^2 \tag{6.148}$$

che, integrata fino a $50AU$, dà una massa totale di $0.04M_\odot$.

A dispetto delle approssimazioni e delle ipotesi in parte arbitrarie il modello fornisce una stima significativa della massa iniziale minima del disco.

6.8.2 Struttura verticale del disco.

La condizione di equilibrio verticale può essere espressa mediante l’equazione dell’equilibrio idrostatico, dove al posto di g viene ovviamente inserita la componente g_z:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g_z = -\rho \frac{GM}{a^2}\frac{z}{a} \tag{6.149}$$

Se $P = \frac{kT}{m}\rho$

$$\frac{kT}{m}\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{GM}{a^3} z dz \tag{6.150}$$

e integrando

$$\rho(z) = \rho(0)e^{-\frac{GMm}{a^3kT}z^2} \tag{6.151}$$

Da cui è anche possibile calcolare lo spessore effettivo del disco definito come:

$$\frac{1}{\rho(0)}\int \rho(z)dz = H \tag{6.152}$$

Con dei numeri e delle ipotesi ragionevoli ($a = a_{Giove}, \quad T \sim 100 \quad K$, molecole d'idrogeno) si ottiene

$$\frac{H}{a} \sim .1 \tag{6.153}$$

che ci permette di rappresentare la struttura del disco con una certa chiarezza. Notiamo che

$$\frac{H}{a} \sim \left(\frac{akT}{GMm}\right)^{1/2}. \tag{6.154}$$

Se ammettiamo che T sia valutabile da una ipotesi di equilibrio radiativo con il Sole $T^4R^2 = cost \Rightarrow T \propto a^{-1/2}$ e quindi $\frac{H}{a} \propto a^{1/4}$.

Sulla base di modelli fisici piú sofisticati la dipendenza di T dalla distanza potrebbe andare con una potenza diversa ($-3/4$?); ció renderebbe ancora piú lenta la variazione di H/a ($\propto a^{1/8}$).

6.8.3 Instabilità gravitazionali

Lo studio delle instabilità gravitazionali nel disco può essere fatto a diversi livelli di raffinatezza. Possiamo per esempio usare le considerazioni svolte nel capitolo precedente in merito al criterio di Jeans (compresa la rivisitazione del *limite di Roche*). Va però ricordato che certe ipotesi del criterio di Jeans, quali la costanza del potenziale gravitazionale nello spazio prima dell'avvio degli eventuali processi di condensazione, non sono valide in un sistema orbitante intorno ad un campo centrale. Gli effetti **mareali**, dovuti proprio al gradiente del campo, hanno qui una rilevanza predominante. Inoltre va tenuto conto dello spessore finito del disco. In questa sede ci limiteremo alla discussione semplificata degli aspetti essenziali.

6.8.4 Schema alla Safronov:sedimentazione della componente polverosa in disco di piccola massa ed instabilità nella polvere

Abbiamo visto come la formazione delle instabilità gravitazionali del disco nel suo complesso sia possibile solo se $M_{disco} \sim M_\odot$ (modello alla Cameron). Lo schema di formazione che parte da un disco di massa piccola $10^{-2} \div 10^{-1} M_\odot$ fa invece appello ad un meccanismo diverso, basato sulla sedimentazione della componente polverosa, i grani, verso il piano equatoriale.

I modelli "alla Safronov" partono da dischi di massa minimale o leggermente superiore, ossia compresa fra il 2 e il 10 percento della massa solare.

In questi modelli si ha una rapida sedimentazione della componente solida, a formare un disco sottile di polvere. In questo disco si avviano rapidamente fenomeni di accrezione, che portano alla creazione di blocchi solidi di dimensione intorno al metro. La possibilità di una condensazione successiva dipende anche dallo spessore del disco.

Se vale una rigorosa equiripartizione, $T_{gas} = T_{polvere}$ e quindi, all'equilibrio, che viene raggiunto in tempi non troppo lunghi in assenza di forte turbolenza del gas,

$$\left(\frac{H}{a}\right)_{polvere} = \left(\frac{akT}{GMm_{polv.}}\right)^{1/2} = \left(\frac{H}{a}\right)_{gas} \cdot \left(\frac{m_{gas}}{m_{polv.}}\right)^{1/2} \tag{6.155}$$

Se per es. $m_{polv.} \sim 10^{-12}g \sim 10^{12}m_{gas}$, il disco di polvere è più sottile di un fattore 10^6.
Qual è la condizione per l'instabilità ?
Alla Roche:

$$\rho_{CR(p)} \sim \frac{M_\odot}{a^3} = \rho_{gas} X_{polvere} \frac{H_{gas}}{H_{polvere}} \tag{6.156}$$

dove $X_{polvere}$ è l'abbondanza in massa della componente solida; se $M_{disco} \sim 10^{-2}M_\odot$ e $\rho_{CR(p)} = 40\rho_{gas}$ si ha quindi

$$X_p \frac{H_{gas}}{H_{polvere}} \geq 40 \tag{6.157}$$

Prendendo $X_p \sim 1/100 \quad , \quad H_p/H_g \sim 1/2000$: la polvere deve essere addensata di alcune migliaia di volte rispetto ad un distribuzione uniforme, meno del 10^6 teorico, ma molto ancora se il gas è turbolento.

In effetti la presenza di turbolenza residua in questa fase costituisce un grosso problema della teoria. La situazione non é del tutto chiara. In effetti, se la turbolenza persiste, una sufficiente sedimentazione del disco di polvere diventa impossibile e il meccanismo delle instabilità gravitazionali non consente di passare da frammenti di un metro (la massima dimensione che sicuramente può essere raggiunta mediante processi di *coagulazione* collisionale) a corpi chilometrici (il minimo necessario per attivare il successivo processo di coagulazione dovuta alla mutua interazione gravitazionale).

Se invece tutto funziona, si formano degli embrioni protoplanetari di qualche decina di chilometri, come si può qualitativamente capire dalle considerazioni svolte nei paragrafi precedenti.

Una ipotesi alternativa suggerisce la possibilità che il processo di aggregazione dovuto a collisioni possa, in condizioni favorevoli, continuare fino alla formazione di frammenti chilometrici (Weidenschilling, Cuzzi, 1993). Tuttavia questo modello alternativo presenta diverse serie difficoltà. A parte l'incertezza sulla efficienza dei processi di coagulazione, frammenti di queste dimensioni, in crescita lenta, verrebbero trascinati in una caduta a spirale verso la stella, a causa dell'attrito ("headwind") con il gas, in rotazione più lenta.

6.8.5 Il ruolo "costruttivo" della turbolenza.

I due precedenti modelli presentano degli aspetti problematici. Tutto sommato il passaggio da corpi di un metro a planetesimi di dimensioni chilometriche non appare soddisfacentemente spiegato. Negli ultimi anni si è imposta una diversa ipotesi di soluzione al problema (Johansen et al, *Nature* 448,1022, 2007) che potrebbe essere risolutiva. Ovviamente, trattandosi di uno sviluppo ancora molto recente, una certa cautela è d'obbligo.

L'idea è abbastanza semplice, almeno in termini qualitativi. La turbolenza, la cui presenza è il problema del modello classico delle instabilità nella componente solida, si rivela avere un ruolo costruttivo. Infatti i moti turbolenti creano degli addensamenti nel gas e in questi addensamenti si concentrano anche dei frammenti solidi "grandi" (dimensioni dell'ordine di un metro). Sulla base di complessi modelli numerici sembra probabile che questi addensamenti di corpi solidi raggiungano le condizioni per l'instabilità gravitazionale, formando "planetesimi" che però, rispetto al modello classico, possono essere anche nettamente più grandi, arrivando a dimensioni da "pianeta nano". La crescita di questi corpi, avvenendo per instabilità gravitazionale, sarebbe più veloce dell'eventuale caduta verso la stella centrale, e quindi la eviterebbe. Il modello sembra anche spiegare in modo soddisfacente le proprietà della fascia asteroidale (in particolare l'eccitazione dinamica e la perdita iniziale di una rilevante quantità di materia), e fornire delle buone condizioni iniziali per la formazione dei pianeti terrestri. Il modello di crescita che presentiamo nel prossimo paragrafo è quello "classico". Questi nuovi sviluppi richiederanno, se confermati, delle significative revisioni.

6.9 Crescita dei protopianeti.

Una volta formatesi le prime aggregazioni (i *planetesimi*) l'evoluzione successiva è pilotata dalle collisioni. Esse possono essere distruttive quando la velocità relativa d'impatto eccede la velocità di fuga v_e di molto, conducono invece ad un accrescimento del corpo più piccolo (il "proiettile") sul più massiccio (il "bersaglio") quando la velocità è sufficientemente piccola; in questo caso le orbite sono tutte approssimativamente circolari e si accumulano molti piccoli pianeti. Solo quando $v_r \sim v_e$ (si noti che per velocità relativa si intende quella all'infinito, non quella di impatto vera e propria, aumentata dall'attrazione gravitazionale del bersagli) il processo di accumulazione potrà aver luogo ed essere efficace.

Consideriamo i planetesimi con un dato semiasse maggiore a; se e è l'eccentricità media i corpi che potranno incontrarsi saranno compresi in una fascia di larghezza ea. Lo stesso discorso può farsi anche per l'inclinazione. La velocità relativa sarà dell'ordine di ena (n è il moto medio; si noti che sia qui come in seguito faremo sempre l'ipotesi, confortata dall'esperienza dei vari sistemi dinamici, e tipicamente falsa solo quando sono in gioco effetti particolari, come le risonanze, che l'eccentricità e l'inclinazione medie siano dello stesso ordine di grandezza; le velocità relative potranno essere indifferentemente stimate a partire da e o da i, e così gli altri parametri in gioco). La velocità relativa v_r è aumentata progressivamente dagli incontri elastici, e diminuita (ovviamente) da quelli anelastici.

Per questo calcolo, evidentemente semplificato, faremo l'ipotesi che tutti i planetesimi abbiano uguale massa m_{pl} e raggio r_{pl}; discuteremo in seguito che cosa cambia se si abbandona questa ipotesi. Se, nella zona che stiamo considerando, la densità superficiale di materia è σ, la densità numerica dei planetesimi potrà essere valutata in $\sigma n / m_{pl} v_r$ (questo perché, sulla base delle considerazioni precedentemente fatte, lo spessore del disco può essere stimato in v_r/n).

Un incontro con parametro d'impatto b cambia la velocità; se $b > r_{pl}$ potremo stimare questa variazione di velocità secondo la relazione:

$$\delta v_r = \frac{Gm_{pl}}{b^2}\frac{2b}{v_r} = \frac{2Gm_{pl}}{bv_r} \tag{6.158}$$

dove il primo fattore corrisponde ad una stima della accelerazione media e il secondo a quella del tempo di interazione.

Molti incontri portano ad una diffusione nello spazio delle velocità, ossia ad un aumento di e e di i, mediante un meccanismo tipo *random walk*.

I possibili valori di b identificano tre regimi:

a)
$$r_{pl} < b < \frac{Gm_{pl}}{v_r^2} \equiv b_0 \tag{6.159}$$

In questo caso si ha un incontro ravvicinato, che causa una forte deflessione (infatti la (6.159) ci dice che nel momento di massima interazione l'energia potenziale di interazione sovrasta l'energia cinetica all'infinito).

b) Quando invece:

$$b > \left(\frac{m_{pl}}{3M_\odot}\right)^{1/3} a = d_{Hill} \tag{6.160}$$

i due corpi interagiscono debolmente (si ricordi che la dimensione del lobo di Hill, definito all'interno del problema ristretto dei tre corpi, definisce sostanzialmente la zona in cui l'influenza del pianeta prevale su quella solare; sono anche possibili definizioni leggermente diverse della zona di influenza, che però, sulla base delle considerazioni che faremo tra un momento, non alterano significativamente i risultati).

L'equazione (6.160) si può anche scrivere nella forma:

$$d = \left(\frac{\rho_{pl}}{3\rho_\odot}\right)^{1/3} r_{pl}\,\frac{a}{R_\odot} \tag{6.161}$$

e ponendo $\rho_{pl}/3\rho_\odot \simeq 1/4$ e $a/R_\odot \simeq 10^3$ (valori stimati per la zona di Giove), si ha $d \simeq 600 r_{pl}$.

c) Il caso più significativo è invece quello intermedio, quando cioè

$$b_0 \; < \; b \; < \; d.$$

Analizzeremo quindi l'effetto di questi incontri a distanza intermedia, utilizzando comunque un formalismo intrinsecamente estendibile anche al caso a).

Consideriamo l'effetto degli incontri con $b \in [b, b+db]$; un corpo subisce in un tempo dt

$$2\pi b\, db v_r\, dt \left(\frac{\sigma n}{m_{pl} v_r}\right)$$

incontri di questo tipo; ognuno di essi causa una deflessione δv_r di direzione e verso casuali; la media di δv_r sarà quindi nulla; ma non è nulla la variazione quadratica; secondo la logica del *random walk* avremo quindi una velocità relativa che aumenta progressivamente nel tempo, sulla base dell'equazione:

$$\left[\frac{dv_r^2}{dt}\right]_{enc} = \int_{r_{pl}}^{d} 2\pi b v_r \frac{\sigma n}{m_{pl} v_r} \left(\frac{2Gm_{pl}}{b v_r}\right)^2 db \tag{6.162}$$

La dipendenza dell'integrale dai limiti di integrazione è logaritmica, quindi non critica:

$$\left[\frac{dv_r^2}{dt}\right]_{enc} = 2\pi \frac{\sigma n}{m_{pl}} \left(\frac{2Gm_{pl}}{v_r}\right)^2 \ln\left(\frac{d}{r_{pl}}\right) \tag{6.163}$$

e, usando la definizione di

$$v_e = \sqrt{\frac{2Gm_{pl}}{r_{pl}}}$$

ed essendo quindi $2Gm_{pl} = v_e^2 r_{pl}$, si ha:

$$\left[\frac{dv_r^2}{dt}\right]_{enc} = 2\pi \frac{\sigma n}{m_{pl}} \frac{v_e^4 r_{pl}^2}{v_r^2} \ln\left(\frac{d}{r_{pl}}\right) \tag{6.164}$$

In parallelo si hanno invece dei fenomeni di collisione vera e propria, che causano, ovviamente, processi anelastici ed implicano quindi la diminuzione, l'annullamento nel caso specifico, della velocità relativa. La sezione d'urto (almeno finché v_r non è troppo piccola rispetto a v_e) è dell'ordine di πr_{pl}^2. Poiché in un impatto la perdita di velocità relativa è $\simeq -v_r$, si avrà:

$$\left[\frac{dv_r}{dt}\right]_{imp} = -\pi r_{pl}^2 \frac{\sigma n}{m_{pl}} v_r \tag{6.165}$$

dove l'espressione a destra è uguale al prodotto di πr_{pl}^2 (sezione d'urto geometrica) per la densità numerica $(\sigma n / m_{pl} v_r)$ per la velocità relativa v_r per la variazione di velocità $-v_r$.

D'altro canto si ha, in termini del modulo della velocità relativa:

$$\frac{dv_r^2}{dt} = 2v_r \frac{dv_r}{dt}$$

da cui, combinando (6.164) e (6.165):

$$\frac{dv_r}{dt} = \left[\frac{dv_r}{dt}\right]_{enc} - \left[\frac{dv_r}{dt}\right]_{imp} = \pi \frac{\sigma n}{m_{pl}} r_{pl}^2 v_r \left[\left(\frac{v_e}{v_r}\right)^4 \ln\left(\frac{d}{r_{pl}}\right) - 1\right] \tag{6.166}$$

L'equazione precedente ci permette di definire un tempo scala:

$$\tau \simeq \frac{m_{pl}}{\pi r_{pl}^2 \sigma n} \tag{6.167}$$

che è di solito piccolo rispetto ai tempi di crescita di un tipico embrione planetario.

Approssimativamente questo tempo scala può essere stimato dell'ordine di 10^6 anni.

In un tempo τ il sistema si avvicina ad uno stato stazionario caratterizzato da un valore di v_r vicino a v_e (come si deduce facilmente dalla forma del termine in parentesi nella eq. (6.166).

Se i protopianeti non hanno tutti la stessa massa, si ha un meccanismo di crescita del più grosso molto più rapida rispetto alla crescita degli altri (**runaway growth**). Ciò avviene, in sostanza, a causa del contributo *gravitazionale* alla sezione d'urto di impatto:

$$\sigma_{imp} \simeq \pi b_i^2 \simeq \pi r_{pl}^2 \left(1 + \frac{v_e^2}{v_\infty^2}\right) \tag{6.168}$$

la quale, almeno per piccoli valori della velocità relativa all'infinito v_∞, risulta proporzionale a r_{pl}^4. La crescita rapida del frammento più grosso gli consente di determinare essenzialmente la dinamica dell'intera zona. Si può dimostrare che in questo caso la velocità relativa tende ad un valore di regime dato dalla relazione:

$$v_r^2 = \frac{Gm_1}{\theta r_1} \tag{6.169}$$

dove m_1 e r_1 sono massa e raggio del maggiore embrione planetario, e θ è un parametro adimensionale (detto "di Safronov" dal nome del planetologo russo autore della teoria dell'accumulazione planetaria) il cui valore numerico non è lontano dall'unità (generalmente lo si valuta compreso tra 1 e 10; talora può assumere anche valori maggiori, fino a 100).

6.10 Formazione dei pianeti giganti e dei corpi minori.

Quando gli embrioni planetari dei pianeti maggiori cominciano a crescere, la velocità relativa v_r cresce, sulla base della eq. (6.169); ciò corrisponde ad un aumento di eccentricità ed inclinazione, che a sua volta rende sempre più ampia la "fascia di cattura"; le zone corrispondenti ai vari pianeti cominciano a sovrapporsi, causando così l'esaurirsi del materiale disponibile per il processo di accumulazione; inoltre la materia può raggiungere tali velocità da essere espulsa al difuori del Sistema Solare, o spinta molto vicina al Sole.

Ipotizzando, per semplicità, un embrione planetario in orbita esattamente circolare, la velocità relativa *critica*, che permetterà l'espulsione dal Sistema Solare quando diretta lungo il moto orbitale, e nel suo stesso verso, sarà:

$$v_r = v_{ej} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{GM_\odot}{a}} \tag{6.170}$$

corrispondente a:

$$\theta_{ej} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} \frac{m_1}{M_\odot} \frac{a}{r_1} \tag{6.171}$$

Per i pianeti esterni nella fase finale di accumulazione questo implica un valore di θ dell'ordine di 100; un valore al limite superiore delle stime teoriche.

L'espulsione di una consistente quantità di materia nelle fasi finali di accumulazione appare quindi come un dato acquisito, che può certamente spiegare la distribuzione di massa presente nel Sistema Solare attuale e riconciliarne i valori presenti con quelli previsti dai modelli di formazione (almeno con quelli "alla Safronov" che richiedono una massa non troppo grande della nebulosa circumsolare primordiale). Un'altra rilevante quantità di materia viene inserita in orbite molto larghe (e molto eccentriche, data la dinamica); quando sono vicini all'afelio questi corpi possono poi essere ulteriormente influenzati dalla perturbazione gravitazionale di altre stelle, ed assestarsi su una orbita finale tutta all'esterno del Sistema Solare che noi conosciamo. Anche le orbite dei pianeti possono evolvere (v. par.6.11).

Ci sono inoltre un certo numero di corpi che vengono deflessi non verso l'esterno del Sistema, ma verso l'interno; in tal caso possono arrivare, al perielio, ad una distanza dal Sole di circa 1/5 rispetto alla distanza alla quale sono stati perturbati (questo nell'ipotesi di un Δv_r equivalente a quello critico per l'espulsione). Anche ciò è sicuramente legato alla storia della fascia asteroidale.

Al di là dei processi iniziali di formazione e accumulazione, è evidente l'importanza, anche in tempi successivi, di una evoluzione collisionale caratterizzata da alte velocità relative, dovuta sia alla presenza di questi proiettili "intrusi" sia, successivamente, a quella dei prodotti dei successivi episodi collisionali catastrofici.

Un altro aspetto essenziale per capire l'evoluzione successiva degli embrioni planetari è la loro differente capacità di catturare, nella regione di influenza, anche la materia presente sotto forma di gas (prevalentemente idrogeno ed elio). Questa capacità dipende da diversi fattori:

1. La massa dell'embrione formato dalla componente "polverosa"; i protopianeti formati al difuori della "snow line", ossia in regioni in cui la temperatura bassa permette di avere molti composti volatili allo stato di ghiaccio, hanno maggiori possibilità di crescere rispetto ai corpi del Sistema Solare interno.

2. La temperatura locale dipende dalla distanza dal Sole; più il Sole è lontano più il gas è freddo e quindi anche un campo gravitazionale moderato è in grado di avviarne la cattura; il processo ha ovviamente caratteristiche "runaway": più un corpo diventa massiccio più è in grado di catturare altra materia. Una moderata differenza di massa iniziale può così risolversi in una grossa differenza finale.

3. La rapidità con cui il protopianeta si forma; se il processo è troppo lungo anche la capacità di catturare il gas risulta ridotta.

L'effetto combinato di questi diversi fattori è che i pianeti interni, fino a Marte, non riescono a catturare il gas, e mantengono quindi massa e composizione della fase precedente (a parte eventuali ridotti accrescimenti, per esempio di acqua, dovuti a impatti cometari; potrebbero questi ultimi essere la sorgente principale dell'acqua sulla Terra). Giove, e in misura ridotta Saturno, riescono a catturare una parte significativa dell'idrogeno e dell'elio presenti nella loro zona; i due pianeti esterni riescono a catturare meno efficacemente anche a causa del più lungo tempo di formazione. Il modello alla Safronov, con queste considerazioni, sembra in grado di spiegare, a differenza dei modelli alla Cameron, anche le differenze composizionali fra i pianeti maggiori.

6.10.1 La legge di Titius–Bode:formulazione alla Armellini e legame con lo schema alla Safronov.

Il modello di formazione planetaria sopra descritto permette anche di interpretare, in una versione moderna, la classica "Legge di Titius Bode". La legge ha subito diverse formulazioni; in una delle più diffuse essa legava i semiassi maggiori dei pianeti con una espressione del tipo:

$$a = B + C2^n \tag{6.172}$$

con B e C costanti e n intero. In unità astronomiche si può porre $B \simeq 0.4, C \simeq 0.3$.

La legge è stata considerata di importanza centrale per molto tempo. Progressivamente si è però dimostrata meno significativa; il pianeta previsto fra Marte e Giove ($n = 3$) è stato trovato (Cerere), ma si è poi visto che era solo il corpo più grande di una complessa fascia di oggetti: quindi nella legge c'è un "buco" per il corrispondente valore di n. Nettuno sta troppo vicino: per rispettare la legge il pianeta dopo Urano dovrebbe avere, con $n = 7$, un semiasse maggiore di poco inferiore a quello di Plutone. Anche matematicamente non è elegante il salto fra Venere ($n = 0$) e Mercurio ($n = -\infty$).

Inoltre in oltre due secoli nessuno ha trovato una plausibile spiegazione teorica per una equazione "diofantea", come questa, basata su numeri interi. La similitudine con i livelli dell'atomo di idrogeno è rimasta solo un argomento di conversazione, senza riscontri di alcun genere.

Infine, in anni recenti, sono stati costruiti dei modelli di "sistemi planetari sintetici", con un qualche algoritmo, e si è verificato che per molti di essi era possibile costruire, a posteriori, una legge simile a quella di TB, riproducendo un numero simile di punti e ammettendo un numero simile di buchi o deviazioni.

Della legge di Titius Bode resta oggi valida solo la formulazione, dovuta a Armellini, secondo la quale i pianeti (e anche, al loro volta, i satelliti dei pianeti maggiori) sono su orbite i cui semiassi maggiori costruiscono una successione geometrica **approssimata**.

Tale formulazione, a differenza delle precedenti, si spiega immediatamente nel contesto del modello precedentemente costruito, come qui dimostrato.

Ipotesi:

I pianeti catturano tutto quello che possono nelle rispettive zone di cattura

Le zone di cattura sono contigue e non si sovrappongono.

Cattura geometrica: se $\langle e \rangle$ è l'eccentricità media dei corpi piccoli, un protopianeta cattura in una zona

$$\Delta a \sim \langle e \rangle a \tag{6.173}$$

Cattura gravitazionale: applicando la fisica dei tre corpi, la zona di cattura è del tipo:

$$\Delta a \sim \left(\frac{m_{pl}}{M_\odot} \right)^\xi a \tag{6.174}$$

dove ξ può essere stimato in 1/3 (lobo di Hill) o 1/4 (Dole 1960).

Nell'ipotesi semplificata che sia

$$\Delta a_{tot} = \Delta a_{geom} + \Delta a_{grav}$$

si ottiene

$$\Delta a_{tot} \sim \left[\langle e \rangle + \left(\frac{m_{pl}}{M_\odot} \right)^\xi \right] a \tag{6.175}$$

Se si ammette che $\langle e \rangle$ vari lentamente con a, essendo ξ piccolo e la prevedibile escursione delle masse protoplanetarie m_{plan} non troppo grande, risulta l'equazione approssimata:

$$\Delta a_{tot} \sim cost.a = ca \tag{6.176}$$

e, nell'ipotesi di contiguità e non sovrapposizione:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{\Delta a_n}{2} + \frac{\Delta a_{n+1}}{2} \tag{6.177}$$

ossia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + c/2}{1 - c/2} = c' \tag{6.178}$$

che è esattamente la legge di Titius-Bode nella formulazione approssimata di Armellini (che vale, con c' diversi, anche per i sistemi satellitari); le deviazioni dall'andamento medio devono evidentemente favorire l"'isolamento" dei pianeti e dei satelliti maggiori, ed è quanto si verifica in realtà.

Queste considerazioni sono state recentemente raffinate, tenendo conto di diversi effetti meccanici; la (6.175), tenendo conto degli effetti delle risonanze (Wisdom, 1980, Lissauer, 1995), potrebbe prendere la forma:

$$\Delta a \sim \left(\frac{m_{pl}}{M_\odot} \right)^{2/7} a. \tag{6.179}$$

Come si vede l'esponente é leggermente diverso, ma ancora compreso tra i limiti sopra discussi (1/3, 1/4).

6.10.2 Caratteristiche dei sistemi planetari; scaling–laws e problematiche aperte

Oltre che alla riscoperta della legge di Titius–Bode le considerazioni in questione possono anche essere applicate a far previsioni sulle caratteristiche di altri sistemi planetari.

Usiamo infatti una relazione generale del tipo della (6.174):

$$\Delta a \sim (m_{pl}/M_*)^\gamma a \tag{6.180}$$

dove M_* è la massa della stella intorno a cui orbita il sistema. Si ha allora, nell'ipotesi (non banale) che la massa del disco sia tutta utilizzata per formare pianeti – si consideri questa come una prima approssimazione:

$$m_{pl} = 2\pi a \sigma \Delta a = 2\pi a^2 \sigma (m_{pl}/M_*)^\gamma \tag{6.181}$$

ossia

$$m_{pl}^{1-\gamma} = 2\pi a^2 \sigma M_*^{-\gamma} \tag{6.182}$$

da cui

$$m_{pl} \propto a^{2/(1-\gamma)} \sigma^{1/(1-\gamma)} M_*^{-\gamma/(1-\gamma)} \tag{6.183}$$

ed essendo la massa del disco:

$$M_{disco} = a^2 \sigma \tag{6.184}$$

si ottiene che:

$$m_{pl} \propto M_{disco}^{1/(1-\gamma)} M_*^{-\gamma/(1-\gamma)} = M_{disco}[M_{disco}/M_*]^{\gamma/(1-\gamma)} \tag{6.185}$$

Ne consegue che il numero dei pianeti, che e' dell'ordine del rapporto fra la massa totale del disco e quella del singolo pianeta, puó essere stimato come:

$$N_p = M_{disco}/m_{pl} \propto [M_{disco}/M_*]^{-\gamma/(1-\gamma)} \tag{6.186}$$

Si puó quindi trarre una conclusione estremamente interessante: i sistemi caratterizzati da un disco piú massiccio producono, presumibilmente, meno pianeti ma piú grossi. Dischi di massa molto piccola formano invece sistemi planetari numerosi ma fatti di corpi minori.

Le conclusioni non cambiano molto a seconda che si prenda $\gamma = 2/7$ o si usino il valore classico di $1/3$ (lobo di Hill) o quello di $1/4$ ottenuto mediante l'analisi del problema ristretto dei tre corpi (Dole 1960).

6.11 La migrazione planetaria

Ad alcuni problemi rimasti aperti (per esempio la sostanziale mancanza di asteroidi oltre $3.3AU$ e la scarsezza di oggetti nella regione della fascia di Kuiper interna a Plutone) si aggiungono quelli introdotti dalle recenti scoperte dei pianeti extrasolari (v. Cap. 7). In generale i pianeti scoperti hanno masse maggiori di quella di Giove, e si trovano a distanza dalla stella molto minore della distanza di Giove dal Sole. Ciò crea problemi di consistenza con il modello alla Safronov, che favorisce l'accumulazione dei pianeti giganti, per crescita di grossi embrioni seguita da una cattura efficiente del gas circumstellare ancora presente, solo ad una distanza dal Sole di alcune unità astronomiche. Sono sicuramente presenti effetti di selezione osservativi, che favoriscono al momento la scoperta di pianeti massicci e vicini. Ma questa spiegazione sembra essere ormai largamente insufficiente. È anche possibile che si debba ricorrere a modelli di formazione differenziati, recuperando magari anche i modelli alla Cameron, e alcuni Autori seguono questa linea di pensiero.

Da un punto di vista osservativo masse dei dischi circumstellari simili a quelle presunte dal modello alla Safronov (alcuni percento della massa della stella centrale) sembrano abbastanza "normali" e solo pochi dischi hanno masse che si spingono a valori di qualche decimo (e che consentirebbero di innescare un processo di formazione per instabilità del gas). Tutto sommato, quindi, l'idea più semplice (e diffusa) è che le differenze riscontrate discendano prevalentemente dalla diversa rilevanza di un fenomeno già proposto, in versione ridotta, per il Sistema Solare (per spiegare alcuni problemi), e che, in altri sistemi, potrebbe aver avuto un ruolo dominante nel definirne le caratteristiche generali: la migrazione planetaria. Questa denominazione in realtà si riferisce a diversi processi:

1. La migrazione dovuta all'interazione dei pianeti, in fase di formazione, con il disco di materia diffusa ancora esistente. Il meccanismo, scoperto da Goldreich e Tremaine (1980),è stato precedentemente applicato per prevedere le caratteristiche degli anelli planetari (v. Cap.3). In presenza di pianeti massicci la fisica del processo cambia sensibilmente.

2. La migrazione dovuto allo scattering di corpi minori –planetesimi– sopravvissuti alla fase di formazione.

3. La migrazione dovuta alla instabilità dinamica di un sistema con due o più pianeti massicci e con orbite relativamente vicine ("Jumping Jupiters").

I primi due processi hanno avuto un ruolo anche nell'evoluzione del Sistema Solare. Il terzo sembra interessante solo per alcuni sistemi extrasolari.

6.11.1 Interazione disco–pianeta: la migrazione di tipo I

Possiamo in parte riutilizzare quanto, nel Cap. 3, a proposito di anelli planetari, è stato già detto a proposito della interazione fra un corpo (un satellite o un pianeta) e una struttura coorbitante diffusa (un sistema di anelli o un disco protoplanetario).

Il problema, nel caso dei processi di formazione, si presenta però con alcune rilevanti differenze. La principale è che, in questo caso, il pianeta è interno al disco, e quindi interagisce sia con un disco interno che con uno esterno.

Come già detto, a dominare l'interazione disco–pianeta sono le risonanze; in particolare:

1. La risonanza di corotazione si ha quando la frequenza orbitale del disco coincide con quella del pianeta; la problematica si arricchisce e articola quando un pianeta si muove su una orbita eccentrica e coorbita, durante il proprio moto non uniforme, con parti diverse del disco.

2. Le già citate "risonanze di Lindblad" (v. Cap. 3 per la definizione).

Queste ultime sono, ovviamente, interne ed esterne. Quelle interne tendono a far migrare il pianeta verso l'esterno (il trasporto di momento sposta invece verso l'interno il materiale del disco). Opposto è il lavoro delle forze esterne. Per motivi che è difficile spiegare con ragionamenti intuitivi l'effetto delle risonanze esterne prevale regolarmente, e il pianeta migra verso l'interno. Si ha quella che viene chiamata "Migrazione di Tipo I".

Il momento angolare scambiato a ogni risonanza di Lindblad dipende dal quadrato della massa del pianeta. Ne consegue che il tempo di migrazione scala con l'inverso della massa planetaria. Esso peraltro è anche inversamente proporzionale alla massa del disco. Un disco massiccio con dentro un pianeta massiccio è quindi il caso privilegiato per una migrazione veloce.

Il problema che viene dai calcoli, fatti con questo modello, è che la migrazione di pianeti massicci è troppo veloce. Anche se si assegna al protopianeta (futuro pianeta gigante) non la massa attuale ma la massa (stimata) del primordiale nucleo solido (alcune masse terrestri) il corpo spiraleggia verso la stella centrale, fino a cadervi (?) in un tempo scala dell'ordine di 10^5 anni al più, ossia prima che possa essersi arricchito del gas e assestato come massa finale. Il processo potrebbe sicuramente spiegare la scarsezza di "brown dwarfs" (v. Cap. 7), ma rischia di essere un boomerang per i modelli di formazione planetaria.

6.11.2 Interazione disco–pianeta: la migrazione di tipo II; altri meccanismi per rallentare o fermare la migrazione

Alcuni effetti possono però rallentare la migrazione verso l'interno, o evitare la caduta del pianeta verso la stella.

Il primo e più generale, che ha luogo quando la massa del pianeta è abbastanza grande (e sono questi i casi più critici) consiste nella formazione di un "gap" intorno al pianeta, che impedisce l'azione di alcune delle più efficaci risonanze di Lindblad. Abbiamo detto in precedenza che l'effetto dell'interazione pianeta–disco è, sorprendentemente, repulsivo: il pianeta e il disco tendono ad allontanarsi. Questo è d'altra parte il meccanismo alla base dell'ipotesi dei "carabinieri" (o "sheperd's dogs") di cui abbiamo parlato nel Cap.3.

Il modello discusso nel paragrafo precedente si basava sull'ipotesi che la densità del disco non venisse violentemente alterata dalla presenza del pianeta (ossia che i meccanismi di diffusione di materia interni al disco prevalessero sull'effetto del pianeta). Ma se il pianeta è grosso (tipo Giove o anche qualcosa di meno) non è più così: il suo effetto domina, e questo provoca lo svuotamento di un anello vicino al pianeta, anello in cui non c'è più materia diffusa e quindi neppure può lavorare l'interazione risonante. La migrazione rallenta, ma probabilmente non in misura sufficiente.

Altri processi possono però essere all'opera per rallentare la migrazione: la presenza di turbolenza su larga scala, che introduce un termine "stocastico" nel moto di migrazione; rilevanti disomogeneità nella densità del disco, e, vicino alla stella, effetti dovuti al campo magnetico della stella, interazioni mareali, scambi di massa tra stella e pianeta. La complessità dei processi, e l'evidente aumento dei parametri del modello, rendono probabilmente non ancora completamente chiarita la situazione.

6.11.3 La migrazione dovuta a scattering di planetesimi. Il "modello di Nizza" per il Sistema Solare

Un meccanismo di migrazione diverso scaturisce dall'interazione dei pianeti con i planetesimi rimasti nel sistema dopo la prima fase di formazione. Lo scattering dei planetesimi, oltre a poterne inserire molti su orbite molto interne o esterne (v. sopra) ha anche un effetto sui pianeti. Se la massa complessiva dei planetesimi non è piccola, rispetto a quella planetaria, i loro semiassi maggiori possono cambiare in misura significativa. In questo caso il segno della migrazione non è definito a priori, ma dipende dalla distribuzione spaziale dei planetesimi. Tipicamente un pianeta abbastanza interno tende a subire scattering che lo fanno migrare verso l'interno, mentre un pianeta esterno subisce piu' interazioni con corpi interni e tende a migrare verso l'esterno. Nel Sistema Solare Giove migra verso l'interno. Saturno verso l'esterno, e lo stesso, in misura molto più intensa, anche Urano e Nettuno.

Come detto nel Cap. 3, questi processi di migrazione eccitano anche l'eccentricità dei corpi delle fasce asteroidali (interessati dalla migrazione all'interno di Giove) e di Kuiper (interessati dalla migrazione all'esterno di Nettuno).

Le idee di cui sopra hanno portato a definire, per il Sistema Solare, il cosiddetto "Modello di Nizza". L'ipotesi di base è che Giove si sia formato di poco all'esterno della posizione attuale (a $5.45AU$ invece delle attuali 5.2); gli altri pianeti esterni si sarebbero invece formati ben più all'interno della loro attuale posizione, Saturno a $8.5AU$, e Urano e Nettuno tra 11 e $17AU$. La migrazione verso l'esterno dei tre pianeti sarebbe stata assicurata dallo scattering con un robusto disco di planetesimi, sopravvissuto alla fase di formazione. Il punto più rilevante è che Saturno era inizialmente interno alla risonanza $2:1$ con Giove (oggi è vicino alla $5:2$). Quando Saturno attraversa la risonanza si ha una fase di intensa eccitazione dinamica e di intenso scattering: una fase, già in precedenza identificata (anche sulla base dei crateri lunari) e chiamata "Late Heavy Bombardment", datata circa $3.8Gy$ nel passato. In questa fase si sarebbero anche definiti i Troiani di Giove (v. Cap.3), che sarebbero stati catturati nella loro orbita attuale.

Il Modello di Nizza deve essere ancora definitivamente confermato, ma rappresenta il punto più avanzato di analisi dei processi di evoluzione del Sistema Solare subito dopo la formazione.

6.11.4 Un'altra possibile causa evolutiva per i sistemi extrasolari: il modello dei "Jumping Jupiters"

Il problema ristretto dei tre corpi non si applica bene ad un sistema planetario in cui ci siano almeno due grossi pianeti: il terzo corpo non ha in questo caso massa trascurabile e non può essere ignorata la sua influenza sui primi due.

Il problema di tre corpi dei quali il primo è una stella di massa M_* e gli altri due pianeti di massa rispettivamente m_1 e m_2 è stato studiato, e, almeno nel caso di orbite circolari, è stato identificato un criterio di stabilità dinamica; il rispetto del criterio è condizione sufficiente –ma non strettamente necessaria– per la stabilità. È possibile definire un "lobo di Hill dei due corpi" come:

$$R_{H_{1,2}} = [(m_1 + m_2)/3M_*]^{1/3}(a_1 + a_2)/2 \tag{6.187}$$

sulla base del quale il criterio di mutua stabilità sarà:

$$\Delta = a_2 - a_1 \geq 2\sqrt{3}R_{H_{1,2}} \simeq 2.4a_1(\mu_1 + \mu_2)^{1/3} \tag{6.188}$$

dove $\mu_{1,2} = m_{1,2}/M_*$.

Se per esempio applichiamo il criterio al sistema Sole–Giove–Saturno si ottiene:

$$a_S - a_J \simeq 4.3A.U. \geq 1.4A.U. \tag{6.189}$$

ed il sistema è quindi stabile. Per raggiungere l'instabilità occorrerebbe aumentare le masse dei due corpi di circa un fattore 30.

Le situazioni instabili potrebbero causare una evoluzione dinamica anche rilevante, ma richiedono una (non probabilissima) formazione di pianeti giganti in orbite relativamente vicine.

È forse più interessante il caso in cui si abbiano più di due pianeti. In generale non esiste un similare criterio di stabilità, e occorre ricorrere a simulazioni numeriche. È stato dimostrato che anche per sistemi di tre pianeti stabili a coppie (cioè che a coppie rispettano il criterio di stabilità precedente) è possibile avere casi di instabilità globale.

Le simulazioni condotte da Marzari e Weidenschilling (2002) sono partite da sistemi di tre pianeti, di massa simile a quella di Giove, e collocati inizialmente su orbite spaziate regolarmente, secondo la legge:

$$a_i = a_{i-1} + kR_{H_i,i-1} \tag{6.190}$$

dove k è una costante, cui si sono dati valori diversi (da 3 a 5.3, per la precisione) tali da avere condizioni di stabilità o quasi stabilità per i pianeti presi a due a due. L'indice $i-1$ si riferisce al pianeta inizialmente più interno, e i a quello più esterno.

Si vede che in molti casi uno dei tre pianeti (non necessariamente quello inizialmente più lontano; a volte questa sorte capita a quello inizialmente più interno) viene espulso o allontanato a grande distanza dalla stella. Un secondo pianeta resta su una orbita non troppo diversa da quelle dei pianeti iniziali, mentre il terzo viene immesso su una orbita più interna, spesso ellittica e di considerevole eccentricità. Il processo riflette alcune caratteristiche osservate nei sistemi extrasolari (in particolare la distribuzione di eccentricità) ma non è sufficiente a spiegare, almeno da solo, il fenomeno degli "Hot Jupiters" (v. Cap.7). Infatti, per la conservazione dell'energia, si ha:

$$-GM_*(m_1/a_1 + m_2/a_2 + m_3/a_3)/2 \simeq const. \tag{6.191}$$

dove m_i e a_i sono masse e semiassi maggiori dei pianeti. L'energia non è esattamente costante perchè abbiamo trascurato il termine di interazione fra i pianeti, che però apporta una correzione dell'ordine di qualche millesimo, date le condizioni iniziali che escludono vicinanze eccessive. Se si fa l'ipotesi che le tre masse siano uguali, che il corpo 1 venga espulso dal sistema a energia totale vicino a zero, e che il corpo 2 si collochi ad una notevole distanza dalla stella centrale, l'energia finale totale sarà (ancora una volta trascurando i termini di interazione, ancora più ovviamente piccoli):

$$-GM_*(m_3/a_{3f} + m_2/a_{2f})/2 \simeq -GM_*m_3/(2a_{3f}) \tag{6.192}$$

e quindi

$$a_{3f} \simeq \frac{1}{1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3} > a_1/3. \tag{6.193}$$

Se i pianeti inziali sono su orbite di tipo "gioviano", a diverse unità astronomiche, il più interno dei pianeti finali può stare al più sull'orbita di Marte, e non su orbite interne a Mercurio, come è stato in più casi osservato!

Da questo modello si può prevedere che sistemi con pianeti relativamente vicini e orbite eccentriche (meno facili da ottenere con gli altri processi di migrazione) abbiano spesso un altro pianeta massiccio su una orbita esterna.

Come già detto, il modello non spiega invece i sistemi con pianeti strettissimi, per i quali occorre appellarsi al primo processo di migrazione (v. sopra).