LEZIONI DI ASTROFISICA

Prof. Paolo Paolicchi

Prefazione

Le lezioni del corso di Astrofisica, anche in questa nuova versione, si articolano in diverse parti.

Nella 1^a parte (capitoli 1 e 2) vengono analizzate le condizioni di equilibrio di una struttura autogravitante; le considerazioni fatte si applicano a gran parte dei corpi celesti, in particolare alle stelle.

Nella 2^a parte (capitoli da 3 a 8) viene presentato il quadro osservativo generale dell'Astrofisica, con lo scopo di mettere in grado il lettore di poter consultare con profitto la letteratura scientifica. Non vengono invece analizzate in dettaglio le tecniche e le tecnologie astronomiche. Alcune nozioni elementari di astronomia e di meccanica celeste vengono date per note ed altre saranno approfondite nella 3^a parte. Per oggetti di tipo diverso (stelle, pianeti, galassie) vengono identificate e discusse le grandezze osservabili di maggior interesse. Vengono anche brevemente presentate le tecniche di analisi della distribuzione di materia nell'Universo su larga scala.

Nella 3^a parte, che sarà tenuta dal Prof. Penco, vengono richiamati alcuni concetti fondamentali di astronomia classica e vengono introdotte alcune problematiche di meccanica celeste.

Si noti che alcune parti delle dispense sono scritte in corsivo. Si tratta di dettagli o di sviluppi formali che possono essere omessi o che si ritiene possano essere già noti agli studenti da corsi precedenti.

Infine voglio ringraziare i colleghi (ed amici) Scilla Degl'Innocenti, Aldo Dell'Oro Umberto Penco e Steve Shore per la lettura preliminare del testo e per utili consigli che mi hanno permesso di migliorarlo.

Contents

PRIMA PARTE

Introduzione alla Prima Parte

L'astrofisica è il regno della gravitazione. Le forze gravitazionali sono quelle che determinano il moto degli astri, dalla scala del Sistema Solare a quella dell'universo. Inoltre quasi tutti i corpi celesti sono *autogravitanti* ossia sono prevalentemente tenuti insieme dalla mutua attrazione gravitazionale tra le particelle che li compongono. Fanno eccezione a questa regola gli oggetti più piccoli (quelli che è possibile osservare fanno parte del Sistema Solare). Si noti che solo in ambito astrofisico si trovano oggetti tenuti insieme prevalentemente dalla autogravitazione. È questa una peculiarità dell'astrofisica, che motiva questa prima parte del corso, a ciò appunto dedicata. Si può anche capire come la transizione fra oggetti tenuti insieme da forse di tipo elettrostatico e corpi autogravitanti sia sostanzialmente legata alla massa. Le forze di tipo elettrostatico sono a livello elementare molto più intense (di 36 ordini di grandezza per due barioni carichi) di quelle gravitazionali, ma sono in gran parte neutralizzate dalla complessiva neutralità elettrica presente a livello macroscopico. L'energia di legame per particella non dipende in sostanza dalle dimensioni del sistema, e si assesta (se non si tiene conto delle forze interne all'atomo o alla molecola) su un valore costante e molto inferiore a $1ev/barione$. L'energia di autogravitazione per particella è sostanzialmente (con notazioni ovvie) GMm_p/R e dipende da massa e densità. Per una densità come quella dell'acqua (buona approssimazione, per esempio, per i pianeti o per il Sole) tale energia supera $1ev/barione$ già per masse dell'ordine di quella terrestre. Ne consegue che solo i corpi planetari più piccoli possono non essere dominati dalla autogravitazione (con dei calcoli accurati la transizione scende ancora di qualche ordine di grandezza).

Chapter 1

Strutture autogravitanti: equazioni costitutive e caratteristiche dell'equilibrio.

1.1 L'equilibrio idrostatico.

Studiamo ora la struttura di un oggetto autogravitante all'equilibrio. Per equilibrio intendiamo quello meccanico. Vedremo successivamente quali sono i problemi legati all'*equilibrio energetico*, vale a dire al possibile trovarsi in uno stato stazionario in cui l'energia prodotta dalle reazioni nucleari corrisponde istante per istante a quella emessa.

Trascuriamo, per il momento, rotazione e campi magnetici e facciamo l'ipotesi di simmetria sferica. L'equazione che descrive l'equilibrio può essere facilmente dedotta (v. fig. 1.1).

La pressione del gas dipende dalla composizione chimica, dalla densità e dalla temperatura, mediante l'equazione di stato. In generale la composizione chimica dei corpi celesti viene espressa in modo sintetico dai due parametri X, definito come l'abbondanza *in massa* dell'idrogeno e Y (abbondanza in massa di elio). Le abbondanze sono espresse in termini relativi, vale a dire come frazioni della massa totale. X e Y sono quindi per definizione compresi fra 0 e 1. Si veda anche il Cap.5 per una discussione ulteriore. La parametrizzazione scelta è in sintesi dovuta al fatto che in quasi tutti i corpi celesti (e quindi nell'Universo) idrogeno ed elio sono di gran lunga gli elementi più abbondanti; la abbondanza di tutti gli altri elementi $Z = 1 - X - Y$ (chiamata anche *metallicità*) è, per esempio, intorno a 0.02 nel Sole e anche minore in altri casi. Per quanto riguarda l'equazione di stato essa dipende comunque da un unico parametro relativo alla composizione chimica, il **peso molecolare medio** μ (v. § 1.6). Si può scrivere in conclusione:

$$P = P(\rho, T, \mu) \tag{1.1}$$

La differenza di pressione tra la parte interna e quella esterna di un guscio (dovuta in sostanza al peso della parte esterna della struttura) viene all'equilibrio bilanciata dalla forza di gravità; l'accelerazione è data dall'equazione:

$$g(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \tag{1.2}$$

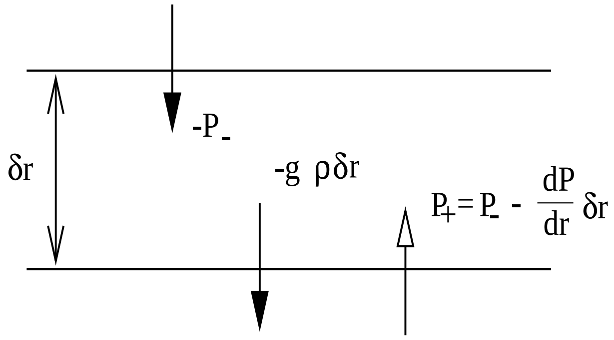

Figure 1.1: equilibrio idrostatico.

La condizione di equilibrio, considerando un elemento di piccolo spessore δr e superficie unitaria, ha la forma:

$$P_+ - P_- - g\rho\delta r = 0 = P_- - \frac{dP}{dr}\delta r - P_- - g\rho\delta r = \delta r\left[-\frac{dP}{dr} - \rho\frac{GM(r)}{r^2}\right]$$

ossia:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) = -g(r)\rho(r) \tag{1.3}$$

detta **equazione dell'equilibrio idrostatico**, dove ovviamente:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\partial P}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dr} + \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dr} + \frac{\partial P}{\partial \mu}\frac{d\mu}{dr} \tag{1.4}$$

Si noti che qui r è calcolato partendo dal centro, e aumenta andando verso l'esterno. Questo spiega il segno nell'equazione diverso rispetto a quello che si trova, per esempio, in alcune trattazioni relative alle proprietà dell'atmosfera, nelle quali la variabile indipendente è di norma l'altezza h. La soluzione dell'equazione (1.3) richiede di legare fra di loro le tre funzioni P, ρ, ed M. In effetti M e ρ non sono indipendenti, ma legate dalla relazione, valida per simmetria sferica:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho(r) \tag{1.5}$$

P e ρ sono legate tramite l'equazione di stato, che dipende però anche da T, X, Y, a loro volta funzioni della posizione. La conoscenza di queste funzioni implica evidentemente la simultanea risoluzione di altre equazioni, che esprimono la struttura termica ed anche la distribuzione delle abbondanze chimiche come –eventuale– risultato di processi evolutivi.

Si può evitare di risolvere simultaneamente l'intero sistema di equazioni solo sulla base di ipotesi a priori sulla funzione $P(\rho)$ (v. § 1.5).

1.2 I tempi dell'evoluzione dinamica.

Se la (1.3) non è rigorosamente valida, la materia sarà accelerata. Possiamo esprimere l'accelerazione di un dato elemento di materia mediante l'equazione:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = -F\frac{GM(r)}{r^2} \tag{1.6}$$

dove v è radiale, ed $F = O \Rightarrow$ equilibrio, $F < O \Rightarrow$ espansione, $0 < F < 1 \Rightarrow$ collasso. $F = 1$ prende il nome di **condizione di libero collasso** o *free fall*.

Essendo

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}v^2$$

ed approssimando $M(r)$ con $4/3\pi\bar{\rho}r^3$ dove $\bar{\rho}$ (densità media) è indipendente da r, si ottiene:

$$\frac{d}{dr}v^2 = -2FG\frac{4}{3}\pi\bar{\rho}r = -\frac{8}{3}\pi FG\bar{\rho}r \tag{1.7}$$

ed integrando fra r_0 (per cui la materia è in quiete) ed r si ricava:

$$v^2(r) = \frac{4}{3}\pi\bar{\rho}FG\left(r_0^2 - r^2\right) \tag{1.8}$$

Ragionando per il caso di collasso

$$\frac{dr}{dt} = -|v(r)|$$

e quindi

$$\frac{dr}{dt} = -\left(\frac{4}{3}\pi FG\bar{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} r_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ossia:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{3}\pi FG\bar{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.9}$$

La (1.9) può essere integrata fra $r/r_0 = 1$ e $r/r_0 = 0$ (completo collasso) mediante la tecnica della separazione delle variabili

$$-\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{t_f(F)} dt\left(\frac{4}{3}\pi FG\bar{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$-\arccos x|_0^1 = \frac{\pi}{2} = t_f(F)\left(\frac{4}{3}\pi FG\bar{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ovvero

$$t_f(F) = \left(\frac{3\pi}{16FG\bar{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.10}$$

$t_f(F)$ è il tempo impiegato per cadere al centro, per un dato valore di F; per $F = 1$ si ottiene la definizione del **tempo di free fall**:

$$t_{ff} = \left(\frac{3\pi}{16G\bar{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.11}$$

Per un oggetto come il Sole ($\bar{\rho} \sim 1g/cm^3$) $t_{ff} \sim 1$ ora.

La condizione di equilibrio dinamico è sostanzialmente soddisfatta tutte le volte che i tempi di evoluzione dinamica di un corpo sono $\gg t_{ff}$ (ovviamente questo è vero per il Sole). Si noti che per $\bar{\rho} \sim 10^{-20}\, g/cm^3$ (nubi interstellari) $t_{ff} \sim 10^6$ anni, per $\bar{\rho} \sim 10^8\, g/cm^3$ (stelle negli stadi finali dell'evoluzione) $t_{ff} \sim 1$s, quindi **non** esiste una scala di tempo dinamica naturale tipica di tutti i corpi celesti, e non possiamo quindi definire rapido o lento un processo in base alla sua durata senza inserirlo nel suo specifico contesto.

A rigore le (1.10) e (1.11) sono valide per un oggetto che cade mentre $\bar{\rho}$ resta costante nel tempo. Il caso di un collasso simultaneo della struttura è più complesso; l'ordine di grandezza resta tuttavia lo stesso: si tenga conto infatti che $\bar{\rho}$ aumenta con il tempo, aumentando l'accelerazione.

L'errore su $\bar{\rho}$ diventa grosso nelle fasi avanzate del collasso, quando però i tempi evolutivi ($\propto \bar{\rho}^{-1/2}$) sono estremamente ridotti. Si può anche dimostrare che per qualunque valore costantemente positivo di F il collasso a densità infinita avviene in un tempo finito. Il risultato è ovviamente interessante solo sul piano formale; vari effetti fisici, compresi quelli relativistici, intervengono a stadi diversi.

In base a considerazioni simili a quelle riportate qui sopra è anche possibile dimostrare che t_{ff} costituisce una buona stima del tempo impiegato da una struttura in libero collasso ad aumentare la propria densità in misura significativa (per esempio di un fattore e o di un ordine di grandezza).

1.3 Le equazioni di Eulero e di Navier-Stokes.

Più in generale il problema del moto di un fluido può essere studiato definendo un campo di velocità

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \tag{1.12}$$

L'equazione del moto (1.6), esplicitata e generalizzata

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} \tag{1.13}$$

è valida nella formulazione lagrangiana della meccanica dei fluidi, che analizza il moto delle masse elementari in funzione del tempo, estendendo i metodi della meccanica del punto. Nella descrizione euleriana, basata sulla definizione di un *campo di velocità* funzione della posizione e del tempo, diventa invece necessario distinguere tra la variazione nel tempo della velocità di un elemento di fluido dovuta al suo spostamento in un punto diverso, caratterizzato da un diverso valore del campo di velocità, e quella determinata dalla dipendenza del campo dal tempo; essendo

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

si ottiene infine **l'equazione di Eulero**:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} \tag{1.14}$$

Nella deduzione dell'equazione (1.14) non si è ovviamente considerata la possibilità di processi dissipativi che possono aver luogo in un fluido in movimento per effetto della viscosità e di scambi di calore. Per l'introduzione dei fenomeni viscosi è utile riscrivere l'equazione di Eulero in forma tensoriale, usando anche l'equazione di continuità (seguiamo qui lo sviluppo presentato in [1]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \tag{1.15}$$

A tale scopo calcoliamo la velocità di variazione della densità d'impulso:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})$$

Con le usuali notazioni e convenzioni per gli indici ripetuti:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} - v_i\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} \tag{1.16}$$

D'altro lato l'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + g_i \tag{1.17}$$

può essere inserita nella (1.16) dando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= -v_i\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} - \rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) - \delta_{ik}\frac{\partial P}{\partial x_k} + \rho g_i \end{aligned} \tag{1.18}$$

E' possibile quindi definire il **tensore di flusso d'impulso**

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k \tag{1.19}$$

La (1.18) prende la forma (che spiega anche il nome scelto per Π_{ik} *):*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_{ik} + \rho g_i \tag{1.20}$$

Se $\vec{g} = 0$*, integrando sul volume:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int(\rho v_i)dV = -\int\frac{\partial}{\partial x_k}(\Pi_{ik})\,dV = \oint\Pi_{ik}df_k \tag{1.21}$$

La generalizzazione della (1.20) al caso viscoso può essere fatta aggiungendo al tensore Π_{ik} un termine $-\sigma'_{ik}$ che caratterizza il trasporto viscoso d'impulso, dovuto sostanzialmente ad attriti interni; σ'_{ik} deve essere nullo in presenza di moto uniforme di tutto il fluido; deve dipendere dalle derivate di v rispetto alla posizione, ed essere quindi formato da termini della forma $\partial v_i/\partial x_k$. Anche in caso di rotazione uniforme ($\vec{v} = \vec{\Omega}\wedge\vec{r}$) σ'_{ik} si deve annullare.

Il tensore più generale che soddisfa a queste condizioni è:

$$\sigma'_{ik} = a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)+b\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik} \tag{1.22}$$

con a e b indipendenti dalla velocità. Si scrive però più frequentemente σ'_{ik} sotto la forma:

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \tag{1.23}$$

dove il tensore fra parentesi ha traccia nulla. Le quantità η e ζ sono i **coefficienti di viscosità***, e sono sempre positivi.*

L'equazione del moto in presenza di viscosità si ottiene aggiungendo un termine della forma $\partial\sigma'_{ik}/\partial x_k$: abbiamo quindi

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\rho g_i+\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k} \tag{1.24}$$

Se i coefficienti di viscosità η e ζ sono costanti o variano comunque lentamente con la posizione, è possibile porre:

$$\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \eta\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\zeta\frac{\partial}{x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \tag{1.25}$$

dove

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\equiv\vec{\nabla}\cdot\vec{v},\quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} = \Delta v_i$$

e quindi la (1.24) può essere riscritta nella notazione vettoriale:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}+\eta\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) \tag{1.26}$$

*Per un fluido incompressibile $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$, e la (1.26) viene semplificata togliendo l'ultimo termine a destra, ed ottenendo l'***equazione di Navier-Stokes***; se $\vec{g} = 0$:*

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\rho\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}-\vec{\nabla}p+\eta\Delta\vec{v} \tag{1.27}$$

La risoluzione delle equazioni (1.26) o (1.27) richiede ovviamente una accurata analisi delle condizioni al contorno. Non approfondiremo l'argomento in questa sede, rimandando a dei testi di meccanica dei fluidi (ad es. [1]).

——————————————————————————-

1.4 Limitazioni sulla pressione centrale.

L'equazione dell'equilibrio idrostatico (1.3) può essere scritta, mediante la (1.5) nella forma:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G}{4\pi}\frac{M(r)}{r^4}\frac{dM(r)}{dr} \tag{1.28}$$

ossia

$$dP = -\frac{G}{4\pi}\frac{MdM}{r^4} \tag{1.29}$$

che può essere integrata ottenendo:

$$P_c - P_0 = \frac{G}{4\pi}\int_0^M \frac{MdM}{r^4} \tag{1.30}$$

Se, come è certamente vero per oggetti stellari, la pressione nelle zone esterne (P_0) è molto minore di P_c, possiamo avere

$$P_c \simeq \frac{G}{4\pi}\int_0^M \frac{MdM}{r^4} \tag{1.31}$$

Fin qui non abbiamo fatto alcuna ipotesi. La piè semplice approssimazione può essere fatta trasformando l'equazione in una "equazione dimensionale": $P_c \simeq GM^2/R^4$ un approccio che permette di fare delle stime molto rapide, a livello di ordine di grandezza.

Si possono fare anche stime un po' più raffinate. Per esempio ammettiamo che ρ sia una funzione decrescente di r. Ha senso allora trasformare la (1.31) definendo

$$\bar{\rho}(r) = \frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3} \tag{1.32}$$

da cui si ricava

$$r = \left[\frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi\bar{\rho}(r)}\right]^{\frac{1}{3}}$$

ottenendo infine

$$P_c \simeq \frac{G}{4\pi}\int_0^M \frac{MdM}{\left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi\bar{\rho}}\right)^{\frac{4}{3}}} \tag{1.33}$$

ossia:

$$P_c \simeq \frac{G}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{4}{3}}\int_0^M \bar{\rho}(r)^{4/3}M^{-1/3}dM \tag{1.34}$$

Sarà poi, $\forall r$

$$\rho_c \equiv \bar{\rho}(0) \geq \bar{\rho}(r) \geq \bar{\rho}(R)$$

per cui:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} GM^{2/3}\bar{\rho}(R)^{4/3} \leq P_c \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} GM^{2/3}\rho_c^{4/3} \tag{1.35}$$

Si potrà anche porre, con semplici trasformazioni:

$$\frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4} \leq P_c \leq \left[\frac{\rho_c}{\bar{\rho}(R)}\right]^{\frac{4}{3}} \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4} \tag{1.36}$$

La (1.35) e (1.36) permettono interessanti conclusioni. La pressione centrale, per dati raggio e massa, assume il valore minimo per una struttura omogenea. Negli altri casi, l'escursione in P_c *consentita dalla (1.36) è relativamente grande; per il Sole, per es.* $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}(R)} \sim 10^2$*, e questo causa una indeterminazione su* P_c *di oltre due ordini di grandezza (naturalmente in questo contesto).*

1.5 Modelli politropici.

Con lo scopo di ottenere informazioni più accurate possiamo sviluppare ora una diversa approssimazione. Applichiamo ad ambo i membri della (1.3) l'operatore

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2$$

(se consideriamo che, nelle date condizioni di simmetria sferica, la (1.3) connette le due uniche componenti non nulle dei gradienti di pressione e del potenziale gravitazionale, l'operatore in questione è la divergenza in coordinate polari; ricordiamo che div grad $\equiv \Delta$);

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -G\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}M(r) \tag{1.37}$$

Mediante la (1.5) si ha quindi

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{1.38}$$

Ammettiamo ora (v. le conclusioni del §1.1) che si possa ipotizzare l'esistenza di una **relazione politropica**:

$$P = C\rho^{\beta} = C\rho^{\frac{n+1}{n}} \tag{1.39}$$

dove β è un esponente reale generico. L'equazione viene di solito espressa nella seconda forma sopra riportata (equivalente alla prima), in cui si introduce il numero (anch'esso reale) $n = 1/(\beta - 1)$, che prende il nome di **indice politropico**.

Ponendo $r = \xi\alpha$ e $\rho = \Theta^n\rho_c$ la (1.38) prende la forma adimensionale:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\Theta}{d\xi}\right) = -\Theta^n \tag{1.40}$$

(**equazione di Lane-Emden**), dove

$$\alpha^2 = \frac{(n+1)C\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \tag{1.41}$$

e dove le condizioni al contorno sulla $\Theta(\xi)$ sono:

$$\Theta(0) = 1 \quad \frac{d\Theta}{d\xi}(0) = 0 \tag{1.42}$$

(la densità è massima al centro).

La (1.40) viene integrata, per vari n, fino alla superficie definita per $\xi = \xi_1$, quando si trova per la prima volta

$$\Theta(\xi_1) = 0$$

Per $n \geq 5$ la configurazione non ha dimensioni finite; particolarmente interessante è questo risultato se si pensa ad una sfera isoterma di gas perfetto, retta dalla relazione politropica $P = C\rho$, con $n = \infty$; una sfera isoterma ha dimensioni infinite, cioè la sua densità non diventa mai esattamente uguale a zero, anche se diminuisce rapidamente andando verso l'esterno (con un andamento di tipo esponenziale, come si può facilmente dimostrare risolvendo la (1.3) nell'ipotesi di un gas perfetto). .

Dato n, la (1.40) ci dà la forma della funzione $\Theta(\xi)$. La conoscenza reale dell'oggetto studiato richiede anche di fissare due parametri liberi, per esempio ρ_c e C. Da essi è facile calcolare massa e raggio:

$$R = \xi_1\alpha = \xi_1 \left[\frac{(n+1)C\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}\right]^{\frac{1}{2}} \propto C^{\frac{1}{2}}\rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \tag{1.43}$$

$$M = 4\pi \int_0^R r^2\rho dr = 4\pi\rho_c\alpha^3 \int_0^{\xi_1} \Theta^n\xi^2 d\xi \propto C^{\frac{3}{2}}\rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \tag{1.44}$$

Inversamente possiamo anche ottenere ρ_c e C da massa e raggio:

$$\rho_c \propto \frac{M}{R^3} \tag{1.45}$$

$$C \propto \frac{M}{R}\rho_c^{\frac{-1}{n}} \propto M^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}} \tag{1.46}$$

In conclusione un modello politropico di struttura autogravitante in equilibrio (per esempio una stella) dipende da due parametri, la massa e, per esempio, il raggio. Questo risultato non è in contrasto con la ben nota unicità della soluzione del sistema di equazioni dell'equilibrio di una struttura stellare. In esse infatti viene posto un ulteriore vincolo: che la produzione di energia nucleare della struttura bilanci esattamente l'energia che viene irradiata nello spazio esterno. Se questo non è vero, la struttura si espande o si contrae, assorbendo o liberando energia gravitazionale.

1.6 Cenni sull'equazione di stato; l'equazione di Eddington.

Per studiare qualche caso semplice di modello politropico apriamo una breve parentesi relativa all'equazione di stato.

In prima approssimazione, in un interno stellare o nebulare, la pressione sarà data dalla somma di un termine di gas perfetto e di uno dovuto alla pressione di radiazione; il primo avrà la forma:

$$P_g = \frac{K}{\mu m_p} \rho T \tag{1.47}$$

dove K è la costante di Boltzmann, e μ è il **peso molecolare medio** definito come il numero medio di particelle che contribuiscono alla pressione per ogni unità di massa m_p. Per una miscela di elementi completamente ionizzati, come si hanno negli interni stellari, è:

$$\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i(Z_i+1)}{A_i}} \tag{1.48}$$

dove Z_i e A_i sono numero e peso atomico dell'elemento i-esimo, di abbondanza X_i; Z_i è il contributo degli elettroni, e viene meno se il gas non è completamente ionizzato.

La (1.48) viene approssimata, in termini delle consuete definizioni delle abbondanze, X, Y e Z, con:

$$\mu \simeq \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} \tag{1.49}$$

dove si pone per gli elementi pesanti $(Z+1)/A = 1/2$ (per $^{12}C = 7/12$, per $^{56}Fe = 27/56$...).
Il secondo termine, quello dovuto alla radiazione, sarà

$$P_r = \frac{1}{3} a T^4 \tag{1.50}$$

La pressione totale sarà quindi:

$$P = \frac{K}{\mu m_p} \rho T + \frac{1}{3} a T^4 \tag{1.51}$$

E' possibile definire il parametro $\beta = P_g/P$ (in genere β ha valori diversi in zone diverse di una stessa stella) e quindi $1 - \beta = P_r/P$; si ha allora

$$T = \left[\frac{3(1-\beta)}{a\beta} \frac{K\rho}{\mu m_p} \right]^{\frac{1}{3}} \tag{1.52}$$

ossia:

$$P = \left[\frac{3}{a}(1-\beta) \left(\frac{K}{\mu m_p \beta} \right)^4 \right]^{\frac{1}{3}} \rho^{4/3} \tag{1.53}$$

La (1.53) ci permette di introdurre il **modello standard di Eddington**, basato sull'ipotesi, non motivata fisicamente e che quindi costituisce una drastica approssimazione:

$$\frac{3}{a}(1-\beta)\left(\frac{K}{\mu m_p \beta}\right)^4 = cost. = C^3 \tag{1.54}$$

Ma se $n = 3$, dalla (1.48) si ricava che $M^2 \propto C^3$, e ciò permette di ricavare l'**equazione di Eddington**:

$$F(\beta) = AM^2\mu^4\beta^4 + \beta - 1 = 0 \tag{1.55}$$

Se M è espressa in masse solari ($M_\odot$), $A = 0.00298$. Se $M \sim 1$, essendo $A \ll 1$ e $\mu \sim 1$ sarà $\beta \simeq 1$ e al primo ordine potremo scrivere:

$$1 - \beta \simeq A\mu^4 M^2 \propto M^2 \tag{1.56}$$

mentre, per $M \geq 10^2 M_\odot$, $\beta \ll 1$ e asintoticamente, per grandi masse

$$\beta \propto M^{-1/2} \tag{1.57}$$

Come si vede, il contributo della pressione di radiazione è prevalente per grandi masse in equilibrio. Ciò è ancora più vero per grandi masse in espansione. Infatti se, date M e ρ, $T > T_{eq}$, $P_g \to P_g(T/T_{eq})$, mentre $P_r \to P_r(T/T_{eq})^4$ ed il contributo della pressione di radiazione è ancora più rilevante. Il discorso resta ovviamente vero se radiazione e materia sono accoppiate termicamente, cioè se hanno la stessa temperatura.

1.7 Altre applicazioni: nane bianche e stelle di neutroni

L'esaurimento delle ultime fonti di energia nucleare porta le stelle a collassare verso densità sempre più alte, prima riscaldandosi e poi, via via che il calore in eccesso viene riemesso, raffreddandosi e diventando sempre meno luminose, mentre il gas, la cui pressione le tiene in equilibrio, diviene completamente degenere. Si hanno così le cosiddette *nane bianche* (e poi, quando sono completamente fredde, *le nane nere*). Si veda la Seconda Parte per un inquadramento dal punto di vista osservativo.

Studiamo ora l'equilibrio di una nana bianca sulla base di alcune ipotesi semplificatrici:

- la pressione è dovuta esclusivamente ad un gas di elettroni completamente degenere.
- il gas elettronico è dovunque non relativistico (N.R.) o estremo–relativistico (E.R.)
- si trascurano effetti coulombiani ed altre complicazioni.

Se queste ipotesi sono verificate, l'equazione di stato ha la forma:

$$P = C\rho^\beta = C\rho^{1+\frac{1}{n}} \tag{1.58}$$

con $\beta = 5/3$ (N.R.) o $\beta = 4/3$ (E.R.).

Per la deduzione di questi andamenti si rimanda a testi di fisica statistica. Si ricordi che la pressione, o la densità di energia per unità di volume (si veda il Cap. 2) si possono ottenere (a meno di coefficienti moltiplicativi) moltiplicando la densità per l'energia cinetica media per particella. Tale energia dipende dall'*impulso di Fermi* $p_F \propto n^{1/3}$ (come si ottiene in base al principio di esclusione di Pauli, contando il numero degli stati nello spazio degli impulsi). Per particelle classiche (N.R.) l'energia è proporzionale all'impulso al quadrato, mentre per particelle estremorelativistiche $E \sim pc$. Si ottengono quindi le due relazioni suddette.

La (1.58) definisce in sostanza una politropica. In base alla eq.1.44 si ha nel caso N.R. ($n = 3/2$):

$$M \propto \rho_c^{1/2}$$

ossia

$$\rho_c \propto M^2 \tag{1.59}$$

mentre nel caso E.R. (valido per grandi densità)

$$M = cost \tag{1.60}$$

Data la massa, la densità centrale aumenta con M^2 fino all'instaurarsi del regime E.R.; a quel regime una ed una sola massa è all'equilibrio, che è anche la massima che può essere sorretta dalla pressione degli elettroni degeneri. Tale massa prende il nome di massa di Chandasekhar (M_{Cha} e vale circa $1.4 M_\odot$ per nuclei di puro elio o carbonio o di altri elementi pesanti.

Esplicitiamo i calcoli in un caso ulteriormente semplificato, in cui usiamo per l'equilibrio il teorema del viriale e imponiamo $\rho(r) = cost.$.

L'ipotesi è rozza, ed i conseguenti risultati numerici inesatti; nondimeno saranno interessanti le dipendenze da alcune costanti fisiche. Il teorema del viriale ci dice che:

$$2\int \epsilon_{cin} dV = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = \frac{3}{5}G\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3} M^{5/3}\rho^{1/3} \tag{1.61}$$

Nel caso N.R. si ha:

$$2\int \epsilon_{cin} dV = \frac{3}{5}(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{1}{\mu_e m_p}\right)^{5/3} M\rho^{2/3} \tag{1.62}$$

(si ricordi che $\int \rho dV = M$);μ_e è il peso molecolare medio quando si considera solo il contributo alla pressione degli elettroni; $\mu_e = 1$ per l'idrogeno (un per elettrone) mentre è circa uguale a 2 in tutti gli altri casi (due –o qualcosa di più– adroni per elettrone). Nel caso E.R.si ottiene:

$$2\int \epsilon_{cin} dV = \frac{3}{2}c\hbar(3\pi^2)^{1/3}\left(\frac{1}{\mu_e m_p}\right)^{4/3} M\rho^{1/3} \tag{1.63}$$

Nel caso N.R. la relazione ρ/M diventa:

$$\rho = \frac{4}{27\pi^3}G^3\frac{(\mu_e m_p)^5 m_e^3}{\hbar^6}M^2 \tag{1.64}$$

mentre nel caso E.R. si ha:

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^{3/2} \left(\frac{c\hbar}{G}\right)^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\mu_e^2 m_p^2} \sim M_{Cha} \tag{1.65}$$

I calcoli condotti rigorosamente, risolvendo l'equazione di Lane-Emden, modificano i coefficienti numerici nelle (1.64, 1.65) (qui ora ρ diventa la densità centrale ρ_c) ma non la dipendenza analitica dalle varie costanti fisiche e dal parametro μ_e.

Notiamo infine che per $\mu_e = 1$ $M_{Cha} \sim 5.7 M_\odot$; tale risultato non è interessante in quanto una stella di tale massa evolve nuclearmente ben prima della fase degenere ed esaurisce gran parte dell'idrogeno.

Quando la massa supera M_{Cha} non esistono soluzioni di equilibrio; ma già per masse leggermente minori la densità di equilibrio è così grande da dar luogo a processi fisici che cambiano la situazione; si va verso modelli stellari estremamente strani, gli stessi che ci permettono di interpretare quello che rimane dopo un'esplosione di supernova (v. PII).

Per grandi densità, a causa dei processi di neutronizzazione della materia, il termine prevalente della pressione diventerà quello dei neutroni degeneri.

Possiamo quindi studiare, per densità nettamente superiori a $10^{10} g/cm^3$, un modello approssimato di *stella di neutroni*, tenendo in conto solo la pressione dei neutroni degeneri.

Il modello, precedentemente studiato, di nana bianca (WD = *white dwarf*, così come NS = *neutron star*) può essere riutilizzato con un opportuno scaling:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} m_e & \longrightarrow & m_n \\ \mu_{WD} & \longrightarrow & \mu_{NS} \\ = 2 & & = 1 \end{array} \right\} \tag{1.66}$$

In regime N.R. si ha:

$$\begin{aligned} \rho^{NS}(M) &= \rho^{WD}(M) \left(\frac{m_n}{m_e}\right)^3 \left(\frac{\mu_{NS}}{\mu_{WD}}\right)^5 \simeq \\ &\simeq 2.5 \cdot 10^8 \rho^{WD}(M) \end{aligned} \tag{1.67}$$

In regime E.R, si ha infine:

$$M_{Cha}^{NS} = M_{cha} \left(\frac{\mu_{WD}}{\mu_{NS}}\right)^2 = 4 M_{cha} \sim 5.7 M_\odot \tag{1.68}$$

Le stelle di massa $M < M_{Cha}^{NS}$ si collocano ad un livello di densità:

$$\rho^{NS}(M) \sim 2.5 \cdot 10^{14} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 g/cm^3 \tag{1.69}$$

Le stelle di massa superiore collassano indefinitamente, divenendo *black-holes* (buchi neri). Un black hole è definito dalla relazione massa-raggio:

$$\frac{2GM}{r_S c^2} = 1 \tag{1.70}$$

dove r_S è detto *raggio di Schwarzschild*, e coincide con la distanza dal centro di una massa per la quale la velocità di fuga, calcolata classicamente, è uguale a c.

La (1.70) può anche essere scritta come una relazione ρ–M:

$$\rho_{crit} \sim 2 \cdot 10^{16} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 g/cm^3 \tag{1.71}$$

che ci conferma come per masse stellari il collasso relativistico avvenga a densità estremamente grandi; notiamo però che ciò non è vero per masse di altro ordine di grandezza; per una massa da nucleo galattico ($10^9 M_\odot$, p. es.) ρ_{crit} scende a valori relativamente modesti ($10^{-2} g/cm^3$).

Nella realtà il collasso finale non è limitato ad oggetti con massa di oltre $5M_\odot$ nella nostra derivazione abbiamo trascurato, oltre agli effetti relativistici, il fatto non secondario che i neutroni, a densità paragonabili a quelle dei nuclei atomici ($\sim 10^{14} g/cm^3$) sono fortemente interagenti. La massa critica diminuisce in misura dipendente dal modello fisico adottato; recenti calcoli sembrano ricondurre la massa critica delle *NS* a valori (casualmente) non lontani dalla M_{Cha} delle nane bianche di elio.

1.8 Corpi autogravitanti in rotazione.

I corpi celesti hanno di regola un momento angolare diverso da zero, anche per ovvie considerazioni probabilistiche (un momento nullo richiede che siano nulle le tre componenti del vettore). Poichè molti corpi celesti vengono formati in conseguenza di un processo di contrazione, che spesso causa un aumento di parecchi ordini di grandezza della densità, e quindi una conseguente diminuzione del momento d'inerzia, una conservazione del momento angolare implica un forte aumento della velocità angolare e dell'energia rotazionale. In molti casi la domanda giusta da porsi non è perchè le stelle ruotino, ma perchè ruotano così lentamente. Una diretta applicazione delle leggi di conservazione porterebbe facilmente a periodi di rotazione stellari dell'ordine di pochi minuti, che causerebbero una rapida rottura della stella per fissione o perdita di materia equatoriale (v. nel seguito). In realtà il momento angolare iniziale delle nubi da cui le stelle si formano si disperde a causa di vari processi fisici (per es., da una nube si formano di regola più stelle, ecc.), e le stelle ruotano più lentamente. Osservativamente le stelle massicce di sequenza principale (v. cap.3) possono avere periodi di rotazione dell'ordine del giorno (non troppo diverso da quello di molti corpi planetari), mentre stelle meno massicce ruotano più lentamente; per esempio il Sole ruota con un periodo vicino al mese. Almeno per le stelle massicce e per i corpi planetari si impone comunque una analisi delle caratteristiche generali dei corpi autogravitanti in rotazione.

Il discorso che qui faremo non si applica invece ad altre strutture, come ad esempio le galassie. Una galassia ha di solito un momento angolare complessivo non nullo, ma non si può dire che ruoti; infatti in una galassia i tempi collisionali relativi alle stelle sono molto maggiori dell'età dell'Universo (e quindi della galassia) e il sistema non può dirsi collisionalmente evoluto e quindi "all'equilibrio termico". In pratica ogni stella si muove per conto proprio, nel campo gravitazionale della galassia. Il moto delle stelle, e la forma della galassia (in realtà un inviluppo delle posizioni istantanee delle stelle) dipendono essenzialmente dalle condizioni inziali del sistema; una galassia può benissimo apparire allungata *lungo* l'asse del momento angolare.

Un corpo in rotazione (stella o pianeta) non avrà più forma sferica. Un corpo fluido in rotazione può essere caratterizzato dal parametro

$$u = \frac{\omega^2 R^3}{GM} \tag{1.72}$$

che sarebbe uguale al rapporto fra forza centrifuga equatoriale e forza peso se il corpo fosse sferico. Il valore di u esprime anche il rapporto fra energia rotazionale e gravitazionale.

Infatti per un corpo sferico omogeneo

$$E_{rot} = \frac{1}{5} M R^2 \omega^2$$

$$E_{grav} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

e quindi

$$\frac{E_{rot}}{E_{grav}} = \frac{1}{3} \frac{\omega^2 R^3}{GM} = \frac{1}{3} u \tag{1.73}$$

Infine, se il corpo è omogeneo:

$$u = \frac{\omega^2}{\frac{4}{3}\pi G\rho} = \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{\pi G\rho} \tag{1.74}$$

In effetti, per rotazione non eccessivamente rapida, la forma del corpo rotante è quella di un ellissoide biassiale, con l'asse minore lungo l'asse di rotazione, semiassi a e b ed eccentricità e (fig. 1.2):

$$b = a \left(1 - e^2\right)^{1/2} \tag{1.75}$$

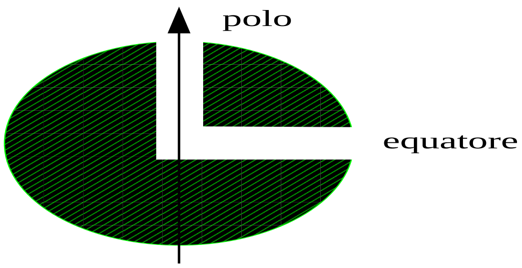

Figure 1.2: ellissoide di rotazione.

Per trovare la forma si può usare l'argomento classico di Newton basato sulla condizione di equilibrio di due colonne di fluido, una polare ed una equatoriale, connesse al centro della Terra, e sul fatto che $g \propto r$ lungo un raggio per un corpo omogeneo.

Si ottiene

$$\frac{1}{2} a g_{eq}(1-u) = \frac{1}{2} b g_{polo} \tag{1.76}$$

ossia

$$a g_{eq} - a^2\omega^2 = g_{polo}\, a\sqrt{(1-e^2)}$$

e quindi:

$$\omega^2 = \frac{1}{a}\left[g_{eq} - g_{polo}\sqrt{(1-e^2)}\right] \tag{1.77}$$

Per un ellissoide di rotazione omogeneo, come fu già dimostrato da Maclaurin:

$$g_{eq} = 2\pi G\rho a\,\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e^3}\left[\arcsin e - e\sqrt{(1-e^2)}\right] \tag{1.78}$$

$$g_{polo} = 4\pi G\rho a\,\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e^3}\left[e - \sqrt{(1-e^2)}\arcsin e\right] \tag{1.79}$$

da cui:

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{\pi G\rho} &= \left[2\,\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e^3}\arcsin e - 2\,\frac{1-e^2}{e^2} - \frac{4\,(1-e^2)}{e^2} + 4\,\frac{\sqrt{(1-e^2)^3}}{e^3}\arcsin e\right] = \\ &= 2\arcsin e\,\frac{\sqrt{(1-e^2)}\,(3-2e^2)}{e^3} - \frac{6}{e^2}\left(1-e^2\right)\end{aligned} \tag{1.80}$$

Sviluppando in serie, per piccoli valori di e:

$$\frac{\omega^2}{\pi G\rho} \sim \frac{5}{6}\,e^2 \tag{1.81}$$

Il comportamento per e qualsiasi è schematizzato nella fig. 1.3.
Definendo lo schiacciamento ai poli:

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_{eq} - R_{polo}}{R_{eq}} = 1 - \sqrt{(1-e^2)} \sim \frac{e^2}{2} \tag{1.82}$$

si ritrova, mediante le eq. 1.74 e 1.81, la relazione di Newton, valida per rotazione non troppo veloce:

$$\epsilon \simeq \frac{4}{5}\,u \tag{1.83}$$

La sequenza si arresta a $\omega^2/\pi G\rho \simeq 0.449$ ed $e \simeq 0.93$; ma già per $\omega^2/\pi G\rho \simeq 0.374$ ed $e \simeq 0.8127$ la *sequenza di Maclaurin* diventa instabile per deformazioni triassali. Le figure di equilibrio stabile diventano ora ellissoidi triassali ("ellissoidi di Jacobi") di maggior momento di inerzia, per i quali all'aumentare del momento angolare ω diminuisce. Intuitivamente questa transizione si può spiegare con la tendenza del sistema (al quale, ricordiamo, vengono imposte

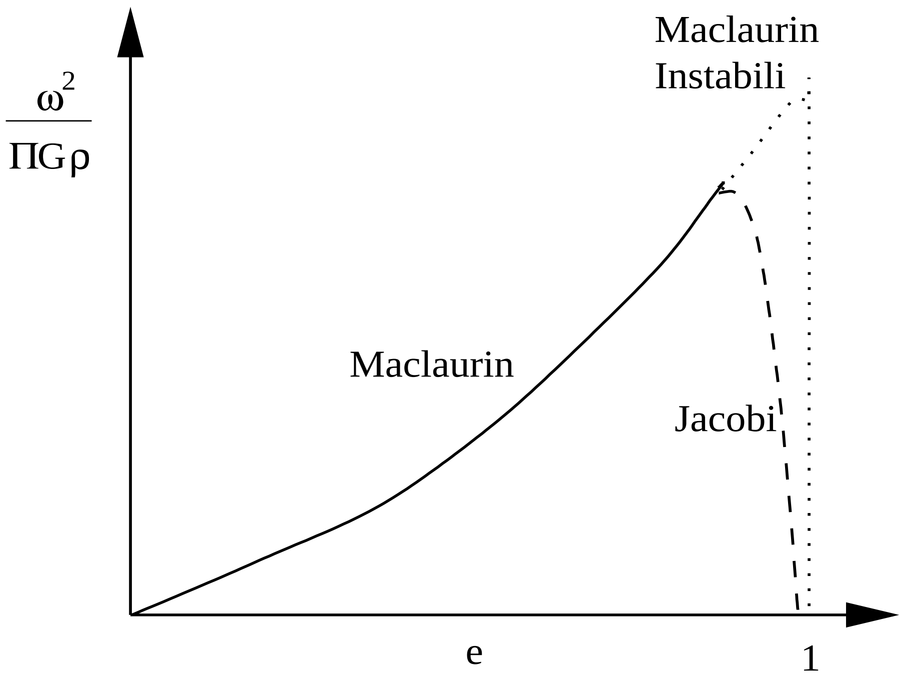

Figure 1.3: figure di equilibrio.

rotazione rigida e densità costante) a dislocare in zone lontane dall'asse di rotazione quantità crescenti di materia, per utilizzare il crescente momento angolare, cercando simultaneamente di massimizzare l'energia di autogravitazione. Per rotazione ancora più veloce ($E_{rot}/E_{grav} \geq .25$) si arriva alla fissione.

I risultati sono qualitativamente generalizzabili in molti casi (es. sistemi non omogenei ecc.). La relazione fra ω e momento angolare per varie figure d'equilibrio è schematizzata in fig. 1.4.

Maggiori dettagli possono essere trovati in [2].

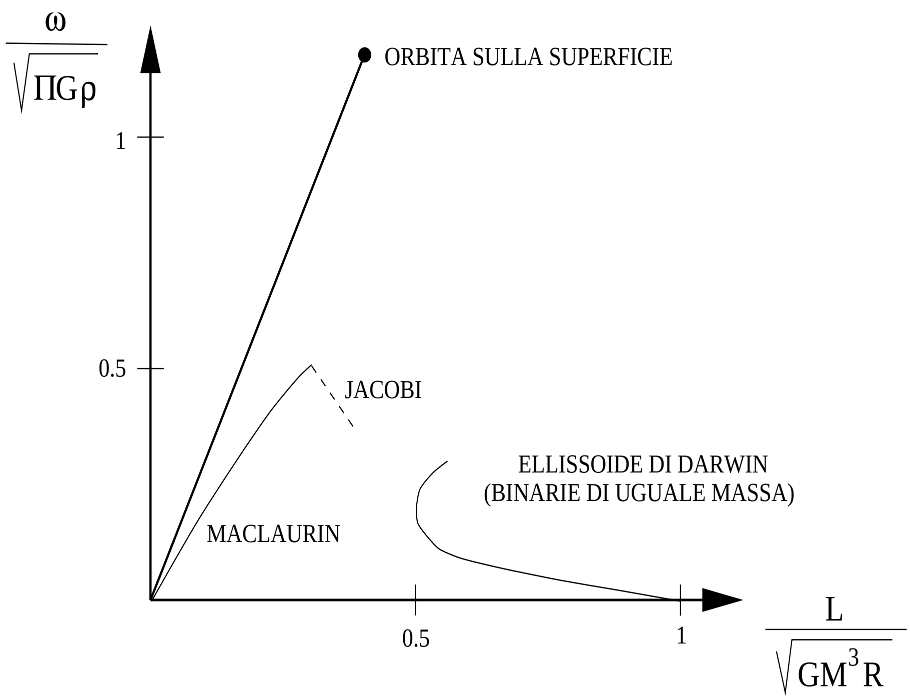

Figure 1.4: relazione $\omega - L$ per diverse figure di equlibrio.

Chapter 2

Strutture autogravitanti: energia e stabilità.

2.1 Il teorema del viriale.

Consideriamo un sistema di particelle definito dalle coordinate di posizione q e dalle velocità $\dot{q}$; si ha:

$$\sum_{i,j} \frac{1}{2} m_i \dot{q}_j^{(i)^2} = \frac{d}{dt} \sum_{i,j} \frac{1}{2} m_i q_j^{(i)} \dot{q}_j^{(i)} - \sum_{i,j} \frac{1}{2} m_i q_j^{(i)} \ddot{q}_j^{(i)} \tag{2.1}$$

Se il sistema è costituito da un gas perfetto autogravitante:

$$\sum_{i,j} m_i q_j^{(i)} \ddot{q}_j^{(i)} = -\sum_{i,j} q_j^{(i)} \frac{\partial U}{\partial q_j^{(i)}} = U \tag{2.2}$$

D'altro canto è possibile scrivere:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i q_j^{(i)^2}\right) & = & m_i q_j^{(i)} \dot{q}_j^{(i)} \\ \sum_{i,j} m_i \dot{q}_j^{(i)^2} & = & 2E_{KIN} \end{array} \right\} \tag{2.3}$$

La quantità $1/2 m_i q_j^{(i)^2}$ è connessa con il momento d'inerzia; definiamo pertanto:

$$I = \sum_{i,j} m_i q_j^{(i)^2} \tag{2.4}$$

e scriviamo quindi la prima (e più utile) formulazione del **teorema del viriale**:

$$2E_{KIN} + U = \frac{1}{2} \ddot{I} \tag{2.5}$$

Se velocità e dimensioni del sistema restano finite, sarà possibile fare una media temporale su di un lungo intervallo, e porre il termine a secondo membro uguale in media a zero:

$$\langle 2E_{KIN} + U \rangle = 0 \tag{2.6}$$

(teorema del viriale per l'equilibrio). Il discorso può essere generalizzato: se sul sistema si esercita una pressione esterna costante P,

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j} m_i q_j^{(i)} \ddot{q}_j^{(i)} &\simeq -U + \oint_S P\vec{r}\cdot d\vec{S} = -U + P\oint_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = \\ &= -U + P\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{r})dV = -U + 3PV \end{aligned} \tag{2.7}$$

e quindi, all'equilibrio:

$$\langle 2E_{KIN} + U - 3PV\rangle = 0 \tag{2.8}$$

Ovviamente in presenza di una compressione esterna l'energia cinetica richiesta per l'equilibrio è maggiore. Consideriamo anche la pressione interna al sistema, non costante, e passiamo ad una descrizione continua. La particella i-esima avrà una massa m_i ripartita in un volume δV_i, con densità ρ_i. Il volume δV_i sarà chiuso da una superficie δS_i; avremo allora, all'equilibrio:

$$-\sum_{i,j} m_i q_j^{(i)} \ddot{q}_j^{(i)} = -U + \sum_i \oint_{\delta S_i} P_i\vec{r}_i\cdot d\vec{S}_i = -U + \sum_i \int_{\delta V_i} \vec{\nabla}\left(P_i\vec{r}_i\right) dV_i =$$

$$= -U + \sum_i \int_{\delta V_i} 3P_i dV_i + \sum_i \int_{\delta V_i} \left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}P_i\right) dV_i = -U + 3\int_V PdV + \sum_i \int_{\delta V_i} \vec{r}_i\cdot\vec{g}_i\rho_i dV_i =$$

$$= -U + 3\int_V PdV + \int_M \vec{r}\cdot\left(-\vec{\nabla}\phi\right) dm = 3\int_V PdV \tag{2.9}$$

Avremo quindi:

$$\langle E_{KIN}\rangle = \frac{3}{2}\left\langle \int PdV \right\rangle \tag{2.10}$$

e, se la pressione esterna è nulla

$$\langle U\rangle = -3\left\langle \int PdV \right\rangle \tag{2.11}$$

Il teorema del viriale, nella sua formulazione (2.6) permette una interessante deduzione. Nel caso di una struttura che si contrae lentamente, passando tra stati di equilibrio quasi perfetto ($t_{ev} \gg t_{ff}$) sarà:

$$\frac{d}{dt}\left(2E_{KIN} + U\right) \sim 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(E_{KIN} + U\right) = -\frac{d}{dt}E_{KIN} = \frac{d}{dt}\left(\frac{U}{2}\right) \tag{2.12}$$

Se il sistema è costituito da un gas perfetto monoatomico, $E_{KIN} + U$ è l'energia totale.
In termini della luminosità L:

$$
\left\{\begin{array}{lcl} L = -\frac{d}{dt}(E_{KIN} + U) & = & -\frac{d}{dt}\left(\frac{U}{2}\right) \\ \\ \frac{3}{2}KN\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}E_{KIN} & = & -\frac{d}{dt}\left(\frac{U}{2}\right) \end{array}\right\} \tag{2.13}
$$

$\Rightarrow$ metà dell'energia gravitazionale liberata viene usata per aumentare l'energia termica e metà viene emessa.

Inoltre, se la pressione esterna è nulla,

$$
dQ = -dE_{KIN} = -\frac{3}{2}KN\,dT \tag{2.14}
$$

e quindi il calore specifico è negativo:

$$
\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{N,P} = -\frac{3}{2}KN \tag{2.15}
$$

2.2 Il tempo di Kelvin–Helmoltz.

Le considerazioni precedenti permettono un ulteriore sviluppo: la stima dell'età di una stella (per esempio il Sole) nell'ipotesi che essa non abbia altre fonti di energia che quella ottenibile per contrazione dalla propria autogravitazione. Una stima che non richiede alcuna informazione sui meccanismi di trasporto dell'energia.

Si faccia l'ipotesi che all'inizio il Sole fosse molto più freddo e rarefatto di oggi ($E_{KIN} \sim 0$, $U \sim 0$), e che da allora si sia lentamente contratto, emettendo una quantità di luce costante nel tempo.

Allora sarà

$$
L_\odot t_k = \left|\frac{U}{2}\right| \tag{2.16}
$$

dove il tempo t_k prende il nome di **tempo di Kelvin–Helmoltz**.

Ora $|U/2| \sim GM^2/R$ (in generale sarà anche minore) e quindi

$$
t_{k\odot} \sim \frac{GM_\odot^2}{R_\odot L_\odot} \sim \frac{7 \cdot 10^{-8} 4 \cdot 10^{66}}{7 \cdot 10^{10} 4 \cdot 10^{33}}\, s \sim 10^{15} s \sim 3 \cdot 10^7 \text{anni} \tag{2.17}
$$

Per evidenze geologiche, l'età della Terra (e quindi, ragionevolmente, del Sole) risulta maggiore di $t_{k\odot}$ per almeno due ordini di grandezza.

Una delle ipotesi fatte è quindi da cambiare: è l'assenza di altre fonti di energia!

Storicamente questo argomento è stato importante per l'introduzione dei processi di nucleosintesi nell'evoluzione stellare.

Notiamo che, a parità di M e L,

$$
t_k \propto \overline{\rho}^{\frac{1}{3}}
$$

($\overline{\rho}$ è ovviamente la densità media).

Esso sarà quindi grande per strutture molto dense, quali nane bianche e stelle di neutroni. Notiamo anche che, in virtù della (2.6) t_k può essere anche definito come il tempo necessario per dissipare tutta l'energia termica di una struttura, a luminosità costante.

2.3 Energia di una struttura autogravitante.

L'energia di una struttura autogravitante può essere stimata sotto una serie di ipotesi. Calcoliamo l'energia potenziale U nel caso politropico quando $P = C\rho^{(n+1)/n}$.
Si ha:

$$U = -G\int M(r)\frac{dM(r)}{r} = -\frac{GM^2}{2R} - G\int\frac{M^2(r)}{2r^2}dr \tag{2.18}$$

Dalla (1.3), ed essendo:

$$\frac{dP}{\rho} = (n+1)\, d\left(\frac{P}{\rho}\right)$$

$$U = -\frac{GM^2}{2R} + \frac{n+1}{2}\int M(r)\, d\left(\frac{P}{\rho}\right) = -\frac{GM^2}{2R} + \frac{n+1}{2}\int d\left(\frac{\overset{*}{M}P}{\rho}\right) - \frac{n+1}{2}\int\frac{P}{\rho}dM \tag{2.19}$$

Tenendo conto che il termine (*) è nullo, se prendiamo $P/\rho \propto T$ nullo alla periferia della struttura, ed essendo $dM/\rho = dV$ e, infine, sulla base della (2.9), si ottiene:

$$U = -\frac{GM^2}{2R} + \frac{n+1}{6}U \tag{2.20}$$

ossia

$$\frac{5-n}{6}U = -\frac{GM^2}{2R}$$

cioè infine

$$U = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R} \tag{2.21}$$

Nel caso omogeneo ($n = 0$) si riottiene il ben noto valore dell'energia di legame per una sfera omogenea:

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \tag{2.22}$$

Nel caso isotermo ($n = \infty$) il calcolo non ha evidentemente senso.

Il calcolo dell'energia interna (tutta termica nelle nostre ipotesi) generalizza il teorema del viriale. Sia in una adiabatica $P = \alpha\rho^{1+1/n_{AD}}$, sia poi e_I la densità di energia interna: $e_I \propto \rho^\delta P^\xi = \beta\rho^\theta$; la condizione di adiabaticità

$$dE + PdV = 0 \tag{2.23}$$

permette di scrivere

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S \tag{2.24}$$

ossia, essendo $V = Mv$ (v = volume specifico = $1/\rho$) ed $E = Me_I$:

$$P = -\left(\frac{\partial e_I}{\partial v}\right)_S = \rho^2 \left(\frac{\partial e_I}{\partial \rho}\right)_S = \theta\beta\rho^{\theta+1} \tag{2.25}$$

da cui si deduce:

$$\theta = \frac{1}{n_{AD}} \qquad \beta = \frac{\alpha}{\theta} = \alpha n_{AD} \tag{2.26}$$

ossia

$$e_I = n_{AD}\frac{P}{\rho} \tag{2.27}$$

Per un gas perfetto monoatomico $n_{AD} = 3/2$; per un gas di radiazione $n_{AD} = 3$.

Integrando la (2.27) sul volume si ottiene:

$$\int PdV = \frac{1}{n_{AD}} \int e_I \rho dV = \frac{1}{n_{AD}} \int e_I dM = \frac{1}{n_{AD}} E_{INT} \tag{2.28}$$

per cui, dalla (2.11):

$$E_{INT} = -\frac{n_{AD}}{3} U. \tag{2.29}$$

L'energia totale diviene:

$$E = E_{INT} + U = \frac{3 - n_{AD}}{3} U = -\frac{3 - n_{AD}}{3} \frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} = -\frac{3 - n_{AD}}{5-n} \frac{GM^2}{R} \tag{2.30}$$

Notiamo che, nel caso particolare in cui $n = 3/2$ $E = U/2$ (si torna al teorema del viriale). Nel caso di una struttura in cui $n = n_{AD}$ (quale potrebbe essere una struttura convettiva; si veda un testo di Fisica Stellare, per esempio [3]):

$$E = -\frac{3 - n_{AD}}{5-n} \frac{GM^2}{R} = -\frac{3}{7} \frac{GM^2}{R} \tag{2.31}$$

(se $n_{AD} = 3/2$).

2.4 Il criterio di stabilità.

In generale l'energia totale può essere scritta, dalla (2.30), nella forma:

$$E = \int dM \left[e_I - \frac{GM(r)}{r} \right] \tag{2.32}$$

Alteriamo ora una struttura di equilibrio con una perturbazione adiabatica. Si ha in tal caso, ricordando la definizione del volume specifico v:

$$\left\{ \begin{array}{ccll} -P & = & \left(\frac{\partial e_I}{\partial v}\right) & \\ & & & \\ \Gamma_{AD}\frac{P}{v} & \equiv & -\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{AD} & = \left(\frac{\partial^2 e_I}{\partial v^2}\right)_{AD} \end{array} \right\} \tag{2.33}$$

Studiamo ora il caso di una perturbazione *self similar* (ossia di una omotetia)

$$r \to r + \delta r = (1+\alpha)r \tag{2.34}$$

e calcoliamo la variazione dell'energia al secondo ordine in α.
Ovviamente

$$\left\{ \begin{array}{rl} v \to (1+\alpha)^3 v & dv \to (1+\alpha)^3 dv \\ \delta v \simeq (3\alpha + 3\alpha^2)v & (\delta v)^2 \simeq (3\alpha)^2 v^2 \\ \rho \to (1+\alpha)^{-3}\rho & M \to M \end{array} \right\} \tag{2.35}$$

per cui

$$\begin{aligned} e_I \quad &\to \quad e_I + \left(\frac{\partial e_I}{\partial v}\right)_{AD} \delta v + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 e_I}{\partial v^2}\right)_{AD} (\delta v)^2 \simeq \\ &\simeq \quad e_I - Pv(3\alpha + 3\alpha^2) + \frac{1}{2}\Gamma_{AD}\frac{P}{v}(3\alpha)^2 v^2 \end{aligned} \tag{2.36}$$

e quindi

$$E \to \int dM \left[e_I - Pv(3\alpha + 3\alpha^2) + \frac{1}{2}\Gamma_{AD}\frac{P}{v}(3\alpha)^2 v^2 - \frac{1}{1+\alpha}\frac{GM}{r} \right] \tag{2.37}$$

È ora:

$$\frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha + \alpha^2 + O(\alpha^3)$$

per cui, al secondo ordine in α

$$\delta E = \int dV \left[\alpha \left(-3P + \frac{GM\rho}{r} \right) + \alpha^2 \left(-3P + \frac{9}{2}\Gamma_{AD} P - \frac{GM\rho}{R} \right) \right] \tag{2.38}$$

La condizione di equilibrio è data dall'annullarsi della derivata prima, ossia del coefficiente lineare in α, ed è equivalente alla (2.10):

$$3\int PdV = \int \frac{GM\rho}{r}dV = -U \tag{2.39}$$

La condizione di stabilità è data dalla positività della derivata seconda:

$$\int dV\left(-3P + \frac{9}{2}\Gamma_{AD}P - \frac{GM\rho}{R}\right) > 0$$

e mediante la (2.39):

$$\int dV\left(-6P + \frac{9}{2}\Gamma_{AD}P\right) > 0 \Rightarrow \int \left(\Gamma_{AD} - \frac{4}{3}\right) PdV > 0 \tag{2.40}$$

Se la perturbazione non è una omotetia, la stabilità è assicurata comunque se $\inf(\Gamma_{AD}) > 4/3$, l'instabilità se $\sup(\Gamma_{AD}) < 4/3$.

Prima di passare a discutere sui valori che Γ_{AD} assume in vari casi, cerchiamo una comprensione intuitiva della (2.40). La (1.35) ci permette di scrivere approssimativamente, per quantità medie P e ρ, e nell'ipotesi di equilibrio:

$$P \sim GM^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{4}{3}}. \tag{2.41}$$

Se si ha una perturbazione adiabatica:

$$\frac{\delta P}{P} \sim \Gamma_{AD}\frac{\delta\rho}{\rho}$$

la condizione di mantenimento dell'equilibrio sarà:

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{AGM^{\frac{2}{3}}\frac{4}{3}\rho^{\frac{1}{3}}\delta\rho}{AGM^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3}\frac{\delta\rho}{\rho} \tag{2.42}$$

Se quindi $\Gamma_{AD} = \frac{4}{3}$ l'equilibrio sarà sempre mantenuto. Ovviamente se $\Gamma_{AD} > \frac{4}{3}$ la pressione crescerà troppo all'aumentare di ρ (o diminuirà troppo al diminuire), bloccando la contrazione (o l'espansione). Se $\Gamma_{AD} < \frac{4}{3}$ avremo invece una perturbazione destinata a crescere. Se Γ_{AD} è costante, si ha per una adiabatica $P = P_0(\rho/\rho_0)^{\Gamma_{AD}}$, e utilizzando il parametro F definito nella (1.6) si ha, da una situazione di equilibrio (P_0, ρ_0):

$$P_0 = AGM^{\frac{2}{3}}\rho_0^{\frac{4}{3}} \tag{2.43}$$

($A \sim 1$ dipende dalla struttura):

$$P(\rho) = P_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\Gamma_{AD}} = (1-F)AGM^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{4}{3}}\rho_0^{\frac{4}{3}} = (1-F)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{4}{3}}P_0 \tag{2.44}$$

ossia

$$1 - F = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\Gamma_{AD}-\frac{4}{3}} \tag{2.45}$$

Se, ad es. F è diventato leggermente > 0 all'inizio della perturbazione:

$\Gamma_{AD} > \frac{4}{3}$ $\quad F(\rho > \rho_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ ritorno all'equilibrio

$\Gamma_{AD} < \frac{4}{3}$ $\quad F(\rho > \rho_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ e aumenta sempre $\quad \Rightarrow \quad$ aumenta l'instabilità

2.5 Gli indici adiabatici.

La discussione del paragrafo precedente ha messo in rilievo l'importanza di Γ_{AD}; in realtà sono definiti tre indici adiabatici:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma_{AD} \equiv \Gamma_1 & \equiv & \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log \rho}\right)_S \\ \\ \Gamma_3 - 1 & \equiv & \left(\frac{\partial \log T}{\partial \log \rho}\right)_S \\ \\ \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} & \equiv & \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log T}\right)_S \end{array}\right\} \tag{2.46}$$

dove vale ovviamente

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1} \tag{2.47}$$

Per un gas perfetto monoatomico:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \frac{5}{3} \tag{2.48}$$

mentre per pura radiazione:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \frac{4}{3} \tag{2.49}$$

Per un miscuglio di gas perfetto e radiazione avremo ovviamente dei valori intermedi. Valori $< 4/3$ saranno invece raggiunti in casi particolari, come quelli di ionizzazione o di dissociazione molecolare parziali. A scopo didattico esplicitiamo il calcolo di Γ_1 e Γ_3 per un miscuglio di gas (idrogeno atomico) e radiazione.

Si hanno le equazioni:

$$\left\{\begin{array}{rcll} de_I & + & Pdv = 0 & \text{(adiabaticità)} \\ \\ P & = & \frac{1}{3}aT^4 + \frac{K}{m_p}\rho T = & \text{(eq. di stato; cfr. § 1.6)} \\ \\ & = & \frac{K}{m_p}\frac{\rho T}{\beta} & \text{(v. § 1.6)} \\ \\ e_I & = & \frac{aT^4}{\rho} + \frac{3}{2}\frac{K}{m_p}T & \text{(cfr. 2.27)} \end{array}\right\} \tag{2.50}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= de_I + Pdv = \\ &= \frac{aT^4}{\rho}\left(4\frac{dT}{T} - \frac{d\rho}{\rho}\right) + \frac{3}{2}\frac{K}{m_p}T\frac{dT}{T} - \frac{1}{3}a\frac{T^4}{\rho}\frac{d\rho}{\rho} - \frac{K}{m_p}T\frac{d\rho}{\rho} = \\ &= -\frac{d\rho}{\rho}\left(\frac{4}{3}a\frac{T^4}{\rho} + \frac{K}{m_p}T\right) + \frac{dT}{T}\left(\frac{4aT^4}{\rho} + \frac{3}{2}\frac{K}{m_p}T\right) \end{aligned} \tag{2.51}$$

ossia

$$
\begin{aligned}
\Gamma_3 - 1 &= \left(\frac{\partial \log T}{\partial \log \rho}\right)_S = \frac{\frac{4}{3}a\frac{T^4}{\rho} + \frac{K}{m_p}T}{\frac{4aT^4}{\rho} + \frac{3}{2}\frac{K}{m_p}T} = \\
&= \frac{\beta + 4(1-\beta)}{\frac{3}{2}\beta + 12(1-\beta)} \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

Facendo poi:

$$
\begin{aligned}
dP &= \frac{4}{3}\,aT^4\,\frac{dT}{T} + \frac{K}{m_p}\rho T\frac{dT}{T} + \frac{K}{m_p}\rho T\frac{d\rho}{\rho} = \\
&= 4(1-\beta)P\frac{dT}{T} + \beta P\left(\frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}\right) \qquad (2.53)
\end{aligned}
$$

ossia

$$
\frac{dP}{P} = \left[4(1-\beta) + \beta\right]\frac{dT}{T} + \beta\frac{d\rho}{\rho} \qquad (2.54)
$$

si ottiene, sostituendo la 2.52:

$$
\Gamma_1 = \frac{5}{3}\beta + \frac{16(1-\beta)^2}{\frac{3}{2}\beta + 12(1-\beta)} \qquad (2.55)
$$

Per $\beta \sim 1$ si ha $\Gamma_1 \sim 5/3\beta$ (al primo ordine in $\epsilon = 1-\beta$); mentre per $\beta \sim 0$ è $\Gamma_1 \sim 4/3+1/6\beta$ (sempre al primo ordine in $\epsilon = \beta$).

2.6 Il problema delle pulsazioni (cenni).

Ritornando ad analizzare il criterio di stabilità (2.40) è ovvio rilevare che, qualora $\Gamma_1 < 4/3$, una perturbazione qualsivoglia può essere amplificata con una crescita esponenziale. Il seguito dell'evoluzione non può essere ovviamente dedotto da criteri di stabilità, basati sulla piccolezza delle perturbazioni; certamente in alcuni casi si avrà l'avvio di una instabilità catastrofica.

Tipicamente di una struttura stellare sono presenti zone (quelle di ionizzazione parziale) in cui $\Gamma_1 < 4/3$. Tuttavia ciò non dà in genere luogo ad instabilità; ha nel caso un ruolo nell'avvio di fenomeni pulsatori osservabili.

Le pulsazioni sono un importante fenomeno presente nell'evoluzione stellare e la presenza di stelle pulsanti caratterizza una precisa zona del diagramma di HR (v. cap. 5).

Senza qui entrare nel problema, possiamo introdurre alcune considerazioni generali.

Come abbiamo visto, il termine quadratico in α dello sviluppo in serie dell'energia, delineato nel § 2.4, è:

$$
\int dV\left(-6P + \frac{9}{2}\Gamma_{AD}P\right) = \frac{3}{2}\int\left(3\Gamma_{AD} - 4\right)P\,dV = -\frac{U}{2}\left\langle 3\Gamma_1 - 4\right\rangle \qquad (2.56)
$$

Essendo

$$-U = \xi \frac{GM^2}{R}$$

dove ξ è un coefficiente dell'ordine dell'unità, e ricordando la definizione di $\alpha = \delta r/r$, potremo scrivere:

$$\delta E \simeq \frac{1}{2}\xi' \frac{GM^2}{R} \left\langle (3\Gamma_1 - 4) \left(\frac{\delta r}{r}\right)^2 \right\rangle \qquad (2.57)$$

dove $\xi' \simeq \xi$. Se, come già ipotizzato nella deduzione della (2.40), $\delta r/r$ è costante $= \delta R/R$, si potrà scrivere:

$$\delta E \simeq \frac{1}{2}\xi' \frac{GM^2}{R^3} \langle 3\Gamma_1 - 4\rangle (\delta R)^2 \qquad (2.58)$$

Se $\langle 3\Gamma_1 - 4\rangle > 0$ eventuali perturbazioni adiabatiche non cresceranno ma daranno vita ad un movimento oscillatorio. Possiamo, in analogia con le usuali considerazioni fatte per l'oscillatore armonico, vedere il coefficiente di $\frac{1}{2}(\delta R)^2$ come la costante di richiamo K', e quindi porre

$$\omega^2 = \frac{K'}{M} = \xi' \frac{GM}{R^3} \langle 3\Gamma_1 - 4\rangle \qquad (2.59)$$

In termini della densità media $\bar{\rho}$:

$$M = \frac{4}{3}\pi\bar{\rho}R^3$$

si ha quindi:

$$\omega^2 = \frac{4}{3}\xi'\pi G\bar{\rho}\langle 3\Gamma_1 - 4\rangle \qquad (2.60)$$

che ci permette di collegare periodo di pulsazione e densità media.

Rileviamo come $t_{puls.} = 2\pi/\omega$ è dello stesso ordine di grandezza di t_{ff} almeno se $\langle\Gamma_1\rangle$ non è troppo vicino a 4/3.

Come vedremo nel Cap.3, per una stella vale la relazione:

$$L = 4\pi R^2 a T_e^4 \qquad (2.61)$$

(dove R è il raggio della stella e T_e **temperatura effettiva** è un parametro legato alla sue caratteristiche superficiali, ed essendo $\bar{\rho} = M/(4/3\pi R^3)$ ossia $R^2 = [M/(4/3\pi\bar{\rho})]^{2/3}$ si può, in base alla 2.61, scrivere:

$$L \propto M^{2/3} T_e^4 t_{puls}^{4/3} \qquad (2.62)$$

che ci dà una relazione periodo–luminosità, anche tenendo conto della limitata variabilità della massa e, all'interno della regione di instabilità pulsazionale, della temperatura efficace T_e.

Le presenti considerazioni, che pur riproducono soddisfacentemente la relazione periodo–luminosità per le stelle variabili, non possono spiegare la causa delle pulsazioni osservate che, per essere osservabili, necessitano di una ampiezza non infinitesima ma sufficientemente grande.

L'avvio e il mantenimento di pulsazioni osservabili sono dovuti a particolari meccanismi legati a scambio di calore, e non possono essere spiegati nell'ambito di un modello adiabatico. Le teorie delle stelle pulsanti mettono in evidenza l'importanza delle zone di ionizzazione parziale.

Per maggiori dettagli, si veda per esempio il testo di Cox e Giuli [4].

2.7 Produzione di energia. Introduzione al problema.

Al bilancio energetico di una struttura autogravitante contribuiscono principalmente tre meccanismi, che intervengono nella definizione della grandezza ϵ che definisce la produzione di energia per unità di massa e di tempo:

- la produzione di energia per cambiamento della struttura (ϵ_g)
- l'assorbimento di energia che viene dispersa in neutrini (ϵ_ν)
- la produzione di energia per reazioni nucleari (ϵ_N).

In questo paragrafo ci limiteremo a delineare molto sinteticamente il problema, rimandando per il secondo e il terzo meccanismo, i più importanti e complessi da un punto di vista fisico, ad un testo di astrofisica nucleare (v. p . es. [5]) o di Fisica Stellare. Per alcuni cenni sulla nucleosintesi si veda anche il Cap.5.In realtà, nel complesso dell'evoluzione stellare (e a maggior ragione su scale maggiori) è il termine ϵ_g a produrre la maggior quantità di energia. Se pensiamo ad una struttura che nasce estremamente rarefatta ($R \to \infty$, $U \to 0$) e muore come stella di neutroni (se non come black hole), e quindi con $R < 10r_s$, $|U| \sim \frac{GM^2}{R} \sim 10^{-1}\, Mc^2$, possiamo concludere che tale struttura libera con tale meccanismo circa il 10% della sua energia di massa a riposo. Le reazioni nucleari nel loro complesso liberano al più 10 $MeV/adrone$, ossia circa l'1% dell'energia totale. Tuttavia la liberazione di energia gravitazionale è concentrata nelle fasi finali dell'evoluzione. Per lungo tempo prevale invece nettamente la produzione nucleare. In sintesi, ϵ_g comanda: nelle fasi iniziali, non nucleari (quando le reazioni di fusione non avvengono a causa della bassa temperatura), e nelle fasi finali (collasso finale), mentre in alcune fasi di transizione ha un ruolo importante; non esercita invece alcun ruolo rilevante nelle fasi di sequenza principale o in altre fasi importanti.

L'energia persa per produzione di neutrini, essendo questi prodotti nell'ambito delle reazioni nucleari, ed avendo gli stessi una sezione d'urto così piccola da farli liberamente sfuggire dalla stella (escluse alcune fasi durante il fenomeno SN), viene computata riducendo opportunamente quella prodotta nelle corrispondenti reazioni di fusione.

2.8 Cenni sui meccanismi di trasporto dell'energia.

Fino ad ora non abbiamo preso in esame il problema del trasporto dell'energia e del conseguente instaurarsi di un gradiente di temperatura; in realtà tale gradiente di temperatura è stato implicitamente ipotizzato, allorché si sono discussi i modelli politropici.

Per una struttura costituita da un gas perfetto, di equazione di stato $P \propto \rho T$, la condizione politropica

$$P \propto \rho^{\frac{n+1}{n}}$$

implica anche $T \propto \rho^{1/n}$ e quindi una temperatura diversa in regioni diverse della stessa.

L'esistenza di un gradiente di temperatura implica anche la presenza di meccanismi di trasporto dell'energia da una zona di produzione (per lo più centrale) ad un'altra di emissione (le regioni esterne).

Definiamo la **luminosità** $L(r)$:

$$L(r) = 4\pi r^2 F(r)$$

dove F(r) è il flusso di energia per unità di tempo e di superficie che fuoriesce dalla struttura a distanza r dal centro (si veda il prossimo capitolo per una discussione più dettagliata).

In generale l'energia sarà trasportata con diversi meccanismi fisici; tra questi i più importanti sono:

1. il trasporto radiativo, legato al moto dei fotoni, che si diffondono dalle zone più calde a quelle più fredde.

2. il trasporto convettivo legato a moti macroscopici della materia.

3. il trasporto conduttivo (importante soprattutto in strutture stellari di alta densità) legato al moto di particelle cariche (elettroni).

2.9 Trasporto radiativo: il gradiente di T.

In generale un flusso di radiazione sará parzialmente assorbito mentre attraversa uno spessore di materia dr. In presenza di assorbitori caratterizzati da una densità numerica n, se σ è la sezione d'urto del processo stesso, l'intensitá I (energia trasportata per unitá di tempo e di superficie) varierá secondo l'espressione:

$$dI = -In\sigma dr \tag{2.63}$$

In realtà avremo la contemporanea presenza di diversi meccanismi di assorbimento e di diversi tipi di assorbitori. È allora più conveniente definire il **coefficiente di opacità** k mediante la relazione:

$$dI = -I\rho k dr = -I d\tau \tag{2.64}$$

dove, ovviamente, ρ è la densità, e τ prende il nome di **profonditá ottica**.

Non discuteremo in questa sede delle problematiche generali relative al trasporto radiativo, e alla fondamentale **equazione del trasporto** (per la quale rimandiamo a testi e corsi di Fisica Stellare o a [13]). Ci limiteremo qui ad alcune deduzioni ottenute con un approccio semiqualitativo.

Con riferimento al flusso di fotoni uscente da una sfera di raggio r nell'intervallo di tempo dt, un elemento di volume $dSdr$ subisce per effetto dell'assorbimento delle radiazioni un impulso dq uguale al numero di fotoni per la probabilità di assorbimento per la quantità di moto di ogni fotone. Si noti che stiamo analizzando solo l'effetto dei fotoni *appartenenti* al flusso uscente. In generale, nell'ipotesi di *equilibrio statistico* (valida quasi sempre nelle strutture stellari, fatta eccezione per alcune regioni atmosferiche) questi fotoni sono una piccola parte del campo di radiazione presente. Per ragioni di simmetria, però (ossia per l'isotropia del campo all'equilibrio) tutti gli altri fotoni non causano trasferimenti di quantità di moto.

Nell'ipotesi (molto semplicistica) di un flusso "monocromatico" di fotoni di frequenza ν e di densità numerica n_ν potremo scrivere:

$$dq = (n_\nu dScdt) \cdot (k_\nu \rho dr) \cdot \frac{h\nu}{c} \tag{2.65}$$

In termini della pressione di radiazione P_r, è possibile scrivere

$$dP_r = -\frac{dF}{dS} = -\frac{dq}{dtdS} \tag{2.66}$$

ossia

$$dP_r = -n_\nu c k_\nu \rho dr \, \frac{h\nu}{c} \tag{2.67}$$

dove k_ν è il coefficiente di opacità relativo a fotoni di frequenza ν. Ma $n_\nu c h\nu = F_{rad}$, e quindi

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{F_{rad}}{c} \, k_\nu \rho \tag{2.68}$$

Se siamo in condizioni di equilibrio termodinamico P_r è collegata con T (anche se, a rigore, queste ipotesi sono incompatibili con un flusso monocromatico di fotoni); poniamo:

$$P_r = \frac{1}{3} a T^4$$

e quindi

$$\frac{dP_r}{dr} = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr} \tag{2.69}$$

da cui

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{F_{rad}}{c} k_R \rho \, \frac{3}{4aT^3} = -\frac{3k_R\rho}{4acT^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} = -\frac{3k_R\rho L(r)}{16\pi ac T^3 r^2} \tag{2.70}$$

Abbiamo ovunque sostituito k_ν con una opacitá media valida per il flusso reale di fotoni, non piú monocromatico k_R (si vedano testi di astrofisica stellare per la definizione di questa quantità detta *media di Rosseland*. L'equazione ci permette di collegare il gradiente di temperatura ad $L(r)$, a r e alle caratteristiche locali della materia (k_ν, T, ρ).

Essa è valida solo se il trasporto è solo radiativo. La discussione degli altri meccanismi di trasporto esula dagli scopi del corso.

2.10 Il limite di Eddington; deduzione della relazione massa-luminosità.

Ammettiamo che valgano le seguenti ipotesi:

a) il trasporto in superficie è radiativo-conduttivo;

b) k è approssimativamente costante;

c) la pressione di radiazione fornisce un contributo dominante alla pressione totale.

La (2.69) può essere scritta nella forma:

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{k_\nu}{c}\rho\frac{L(r)}{4\pi r^2} \tag{2.71}$$

mentre l'equazione dell'equilibrio idrostatico (v. cap. 1): $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\rho$ prende la forma:

$$\frac{dP}{dr} \simeq \frac{dP_r}{dr} \simeq -\frac{GM(r)\rho}{r^2} \tag{2.72}$$

Si ottiene, per $r = R$:

$$L = L(R) = GM\frac{4\pi c}{k} \tag{2.73}$$

Per condizioni corrispondenti a stelle massicce ($\beta \sim 0$) i valori risultanti di k (dovuti prevalentemente all' effetto Compton) permettono di stimare la costante di proporzionalità fra L ed M; in unità solari si ottiene la versione più nota del **limite di Eddington**:

$$\frac{L}{L_\odot} \sim 10^4\frac{M}{M_\odot} \tag{2.74}$$

Questa relazione asintoticamente lineare fra massa e luminosità di stelle massicce non sembra avere molte applicazioni pratiche, mentre è utilizzata per gli studi dei nuclei galattici.

Va anche rilevato che nell'ambito del modello di Eddington ($\beta = cost.$) il calcolo può essere generalizzato rinunciando alla ipotesi c), ed ottenendo, al posto della (2.72)

$$\frac{dP_r}{dr} = (1-\beta)\frac{dP}{dr} = -(1-\beta)\frac{GM(r)\rho}{r^2} \tag{2.75}$$

e quindi (se k non varia molto):

$$L \sim [1-\beta(M)]10^4\left(\frac{M}{M_\odot}\right)L_\odot \tag{2.76}$$

Questa relazione ci conferma che il limite di Eddington fornisce in sostanza una limitazione superiore su L(M); inoltre, dall'equazione di Eddington, per $\beta \sim 1$ (masse piccole), essendo $1-\beta \propto M^2$ si ricava una relazione massa luminosità simile a quella trovata osservativamente (si veda il cap.3):

$$L \propto M^3 \tag{2.77}$$

valida ovviamente sotto le ipotesi a) e b) (stelle relativamente massicce).

Una ultima considerazione. Per un oggetto che sia vicino al limite di Eddington è possibile stimare un tempo di vita compatibile con la disponibilità di energia. Sia quest'ultima espressa in termini della massa come:

$$E_{disp} = \alpha M c^2 \tag{2.78}$$

dove α può avvicinarsi all'unità solo nel caso di processi che coivolgano intensi campi gravitazionali, mentre può valere $\simeq 0.01$ per reazioni nucleari. Si ha allora:

$$T_{max} = E_{disp}/L \simeq \frac{\alpha M c^2}{10^4 M L_\odot / M_\odot} = \alpha T_0 \tag{2.79}$$

dove $T_0 \simeq 2.10^9 y$. La durata di un simile oggetto è quindi sensibilmente più breve dell'età dell'Universo anche per $\alpha = 1$ (caso limite); diventa brevissima nel caso di un modello basato su reazioni nucleari. Tutto ciò vincola fortemente la modellistica e la fenomenologia degli oggetti piú interessati da questa analisi (in particolare i nuclei galattici o stelle di grandissima massa).