

Laboratorio di Interazioni Fondamentali
Esercitazione di analisi dati
(a. a. 2014-2015)

Il Prodotto convolutorio in statistica

Domanda: Siano x e y due variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni $P_x(x)$ e $P_y(y)$ definite su tutto l'asse reale. Come si distribuisce la somma $z = x+y$?

Consideriamo la cumulativa $C(z)$ definita come la probabilità di avere $x+y < z$. $C(z)$ è calcolabile come la probabilità di avere $y < z-x$ moltiplicata per la probabilità di avere un certo valore di x entro un intervallino dx . Il tutto va integrato su tutti i possibili valori di x :

$$C(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} dy P_x(x) P_y(y)$$

essendo per costruzione

$$P_z(z) = \frac{dC}{dz}$$

e commutando la derivata con l'integrale si ottiene

$$P_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(x) dx \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{z-x} P_y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(x) P_y(z-x) dx \quad (1)$$

Esempio: (Propagazione di errori gaussiani) Mostriamo che la somma di due variabili aleatorie indipendenti, è una variabile aleatoria gaussiana. Limitiamoci al caso in cui x, y hanno media nulla; in caso contrario basterà effettuare a posteriori una opportuna traslazione.

$$P_x(x, \sigma_x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma_x^2}}$$

$$P_y(x, \sigma_y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma_y^2}}$$

Per quanto stabilito nella (1) si ha

$$P_z = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{(z-x)^2}{\sigma_y^2} \right]} dx$$

Il calcolo diretto dell'integrale porta alla distribuzione

$$P_z(z, \sigma_z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\sigma_z^2}} \quad \text{con} \quad \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

che è ancora gaussiana. Eseguendo la trasformazione di scala $x \rightarrow ax$ e $y \rightarrow by$ si dimostra immediatamente che anche $z = ax + by$ è gaussiana con varianza

$$\sigma_z^2 = a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2$$

La somma in quadratura degli errori nel caso di combinazione lineare di variabili gaussiane è dunque un risultato esatto, se la dipendenza di z da x, y non fosse lineare allora la somma in quadratura è solo una stima approssimata della varianza di z .

Da questo tipo di considerazioni origina la nozione di “prodotto convolutorio” o convoluzione tra distribuzioni, definito come :

$$(f * g)(x) = \int_D f(y)g(x-y)dy$$

dove D è un certo intervallo di integrazione, spesso coincidente con l'intero asse reale.

La trasformazione Gaussiana

Durante l'analisi di dati sperimentali si presenta spesso il problema di eliminare per quanto possibile gli effetti dovuti alla risoluzione dell'apparato di misura. Si immagini di misurare una certa grandezza, il cui valore vero è x , per mezzo di uno strumento che introduce una incertezza gaussiana. La variabile misurata potrà assumere qualunque valore x' distribuito secondo una gaussiana centrata intorno al valore vero x e di varianza σ .

$$G(x' - x, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x' - x}{\sigma}\right)^2}$$

la funzione $G(x' - x, \sigma)$ rappresenta l'effetto della risoluzione strumentale ed è chiamata in questo contesto “funzione di risposta”. Se la variabile x non assume un solo valore ma è distribuita secondo $P(x)$ allora la distribuzione $P'(x')$ della grandezza misurata x' è data dalla convoluzione della distribuzione originale con la risposta dello strumento

$$P'(x') = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)G(x' - x, \sigma) dx$$

La convoluzione con una gaussiana è noto come “trasformazione di Gauss-Weierstrass”.

Nel limite in cui la risoluzione diventa molto piccola ($\sigma \rightarrow 0$) la funzione di risposta tende alla distribuzione impropria di Dirac $\delta(x - x')$ e lo spettro sperimentale coincide con quello originale. Nel caso di risoluzione finita, l'effetto della convoluzione è quello di “allargare” la distribuzione convoluta e di arrotondare i bordi lisciando (smoothing) lo spettro originale $P(x)$.

Osservazione: chi si diletta di manipolazione di fotografie digitali conoscerà il “Gaussian Blur”, una applicazione disponibile su gimp e foto-shop, usata per correggere certi effetti indesiderati (vedi “effetto moire”). Il gaussian blur non è altro che la trasformata di Weierstrass bidimensionale

eseguita sul contenuto dei pixel di una immagine.

Esempio: Distribuzione Rettangolare uniforme tra $0 < x < L$

$$P(x) = \theta(x) + \theta(L-x)$$

in cui $\theta(x)$ è la funzione gradino. Effettuando la trasformata di Weirstrass si ottiene

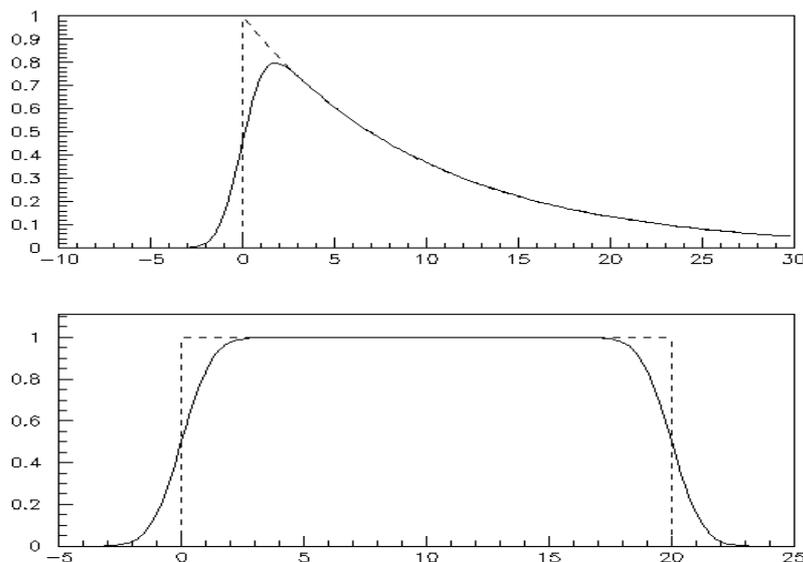
$$P'(x') = A \left[\operatorname{erf} \left(\frac{L-x'}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x'}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]$$

in cui $\operatorname{erf}(x)$ è la funzione cumulativa della gaussiana in forma standard (error function) e la costante A è una opportuna normalizzazione. L'operazione di convoluzione arrotonda gli spigoli della distribuzione e rimuove le discontinuità. L'azione della convoluzione non si fa praticamente sentire nella zona centrale se $L \gg \sigma$.

Esempio: (gradino esponenziale)

$$P(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}} \theta(x)$$

La convoluzione del gradino esponenziale con la gaussiana è una distribuzione praticamente identica al gradino originale per $x \gtrsim 3\sigma$ e se $\sigma \ll \lambda$. L'andamento della distribuzione trasformata è mostrato nel grafico e conferma l'idea intuitiva secondo la quale per osservare i dettagli di un gradino occorre 'guardarlo' con una risoluzione minore delle dimensioni del gradino stesso.



Esercizio: Si dimostri che l'area del rettangolo è uguale all'area del rettangolo convoluto e si generalizzi il risultato per qualunque distribuzione (Cosa ha a che fare questa proprietà con la misura sperimentale della larghezza del mesone J/ψ ?)

Domanda: Il rettangolo convoluto ricorda l'istogramma del conteggio delle coincidenze quando si

mettono in tempo due contatori. Perché ?

Esercizio : Se la risoluzione σ non è costante ma dipende da x , che forma assume il rettangolo convoluto ?

Esercizio: Trovare delle distribuzioni che se sottoposte alla trasformata di Gauss-Weierstrass restano invariate, almeno lontano dai bordi ovvero quando la trasformata coinvolge tutto l'asse reale. [Sugg. Cercate in rete “Inverse Weierstrass transform” ! Sorprendente apparizione dei polinomi di Hermite !]

Misura della massa del neutrino

Una tecnica per misurare l'eventuale massa non nulla del neutrino consiste nell'acquisire con estrema precisione lo spettro energetico dell'elettrone emesso durante un decadimento beta nucleare. Il decadimento beta è una transizione nucleare che aumenta di una unità la carica Z di un nucleo N con la conseguente emissione di un elettrone.



Nel caso in cui il neutrino sia privo di massa, la teoria di Fermi delle interazioni deboli prevede per l'elettrone lo spettro energetico

$$\frac{dN}{dE} = F(Z, E) p_e (Q - E)^2$$

dove il termine Q rappresenta la massima energia dell'elettrone pari alla differenza tra le masse dei nuclei . Il termine $F(Z,E)$ è una funzione caratteristica del nucleo in esame. L'eventuale massa del neutrino abbassa il limite superiore dello spettro al valore $Q-m$ e ne distorce l'andamento. Se ci si limita ad un piccolo intorno del limite superiore, si può considerare la funzione $F(Z,E)$ costante e confondere l'impulso dell'elettrone con la sua energia. Lo spettro si modifica come segue

$$\frac{dN}{dE} = A E (Q - E) \sqrt{(Q - E)^2 - m_\nu^2}$$

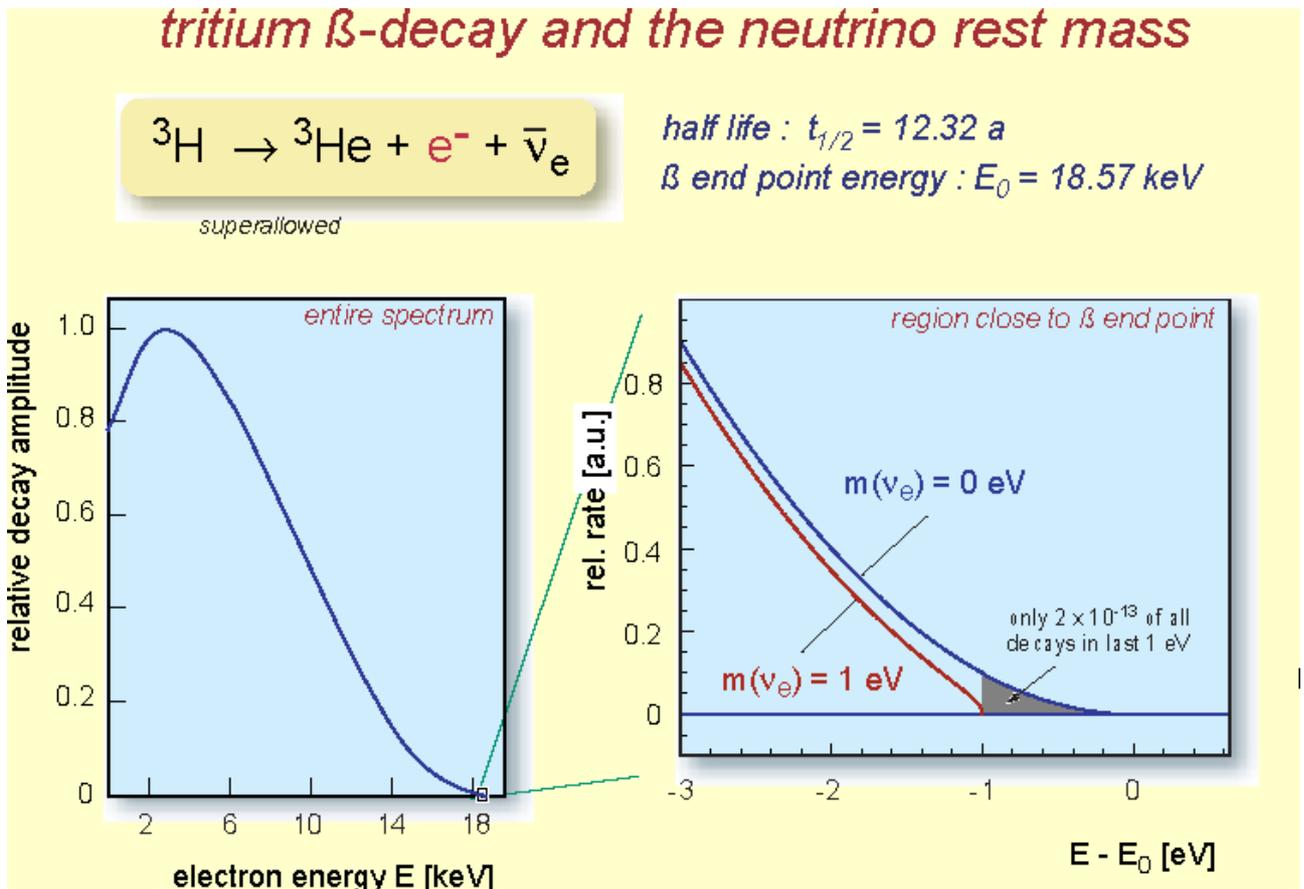
La costante A è una normalizzazione. La distorsione è tanto più pronunciata quanto più piccolo è il Q -valore e quindi la situazione sperimentale più vantaggiosa è quella offerta dal decadimento beta del Trizio



in cui $Q = 18.6 \text{ KeV}$ ovvero il più piccolo tra tutte le transizioni beta note.

Nelle figure seguenti è mostrato lo spettro e la piccola distorsione corrispondente ad una massa del neutrino pari ad 1 eV. Si noti che nel caso di massa del neutrino nulla lo spettro termina con una tangenza orizzontale altrimenti si ha una tangenza verticale. Sperimentalmente lo spettro risulta distorto anche dalla risoluzione dello spettrometro utilizzato per misurare l'energia dell'elettrone. Occorre dunque “deconvolvere” l'effetto della risoluzione dallo spettro sperimentale e vedere se rimane traccia della eventuale massa del neutrino. La risoluzione dello strumento può essere determinata inviando nello spettrometro un fascio di elettroni di energia nota. Un fascio monocromatico di elettroni si realizza tramite tubi catodici o “fucili elettronici” che impiegano varie tecniche di emissione (termoionica, fotocatodi, etc.) e opportune focalizzazioni elettrostatiche

e/o magnetiche (vedere la voce “electron gun” su Wikipedia).



Sono disponibili i seguenti dati:

- 1) La risposta dello spettrometro quando è illuminato da un fascio di elettroni misti con tre valori diversi di energia in un intorno dell'end-point. (file : gun.dat)
- 2) lo spettro di energia dell'elettrone in prossimità del limite superiore (file: kurie.dat)

Provate a misurare con i dati forniti la massa del neutrino. Una traccia del lavoro da fare è data nei punti seguenti.

- Si testi l'ipotesi che la risoluzione dello spettrometro non dipenda dall'energia dell'elettrone e in caso affermativo si combinino opportunamente le quattro funzioni di risposta date fornendo una stima la più accurata possibile per la risposta dello strumento.
- La convoluzione tra spettro teorico e risposta del rivelatore non è calcolabile analiticamente (Provate anche con “Mathematica”: si rifiuterà di farlo !) ma può essere valutata con sufficiente precisione per via numerica approssimando la funzione integranda con una successione di tratti costanti o con qualche altro metodo a vostro piacere. Con che criterio scegliamo di discretizzare l'integrale ? Come possiamo convincerci che la discretizzazione

non introduce incertezza sulla misura della massa ?

- Con un fit opportuno all'end-point dello spettro si determini la massa del neutrino discutendo l'errore trovato e distinguendo tra errore statistico ed errore introdotto dalla incertezza sulla risoluzione e sul Q-valore (si assuma $Q = 18.600 \pm 0.005 \text{ KeV}$)
- Il trizio è disponibile in forma gassosa (come H_2) o liquida come acqua super-pesante (analogo di H_2O). Per fare l'esperimento conviene la forma liquida o gassosa ?

Attenzione ! Le applicazioni che eseguono un fit richiedono l'immissione di valori iniziali per i parametri liberi da determinare. Se lo starting point non è scelto bene la minimizzazione potrebbe convergere a valori insensati. Scegliere con cura lo starting point.

I dati forniti sono stati “taroccati” in modo che la massa del neutrino non è nulla. Trovatela !

Buon Lavoro.