Range effettivo

Studiamo il caso $l=0$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V(r)-E\right)u(r)=0 \qquad (*)$$

$$u(r)\underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad u(r)\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \sin(kr+\delta)/\sin\delta$$

Indichiamo con $u^{(1)}(r)$ e $u^{(2)}(r)$ le soluzioni ad energia E_1 e E_2, rispettivamente.

$$\begin{cases} u^{(i)}(r) \to \dfrac{\sin(k_i r+\delta_i)}{\sin\delta_i} & i=1,2 \\ \dfrac{\hbar^2 k_i^2}{2\mu} = E_i \end{cases}$$

Moltiplichiamo per $u^{(2)}$ l'eq. $(*)$ per la $u^{(1)}$ e per u^1 l'eq ad energia 2 e sottraiamo.
Si ottiene

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(u^{(2)}\frac{d^2}{dr^2}u^{(1)}-u^{(1)}\frac{d^2}{dr^2}u^{(2)}\right)=(E_1-E_2)\,u_{(1)}u_{(2)}$$

ora integriamo tra 0 ed R

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\int_0^R dr\left(u^{(2)}\frac{d^2}{dr^2}u^{(1)}-u^{(1)}\frac{d^2}{dr^2}u^{(2)}\right)=(E_1-E_2)\int_0^R dr\; u_{(1)}u_{(2)}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(u^{(2)}\frac{d}{dr}u^{(1)}-u^{(1)}\frac{d}{dr}u^{(2)}\right)_0^R=(E_1-E_2)\int_0^R dr\; u_{(1)}u_{(2)}$$

Da notare che $u^{(1)} u^{(2)}$ è una funzione oscillante per $r \to \infty$ e non si può ancora prendere il limite $R \to \infty$.

Consideriamo anche l'eq $(*)$ per $V=0$

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{d^2}{dr^2} v^{(1)} = E_1 v^{(1)} \\[2ex] -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{d^2}{dr^2} v^{(2)} = E_2 v^{(2)} \end{cases}$$

prendiamo le soluzioni $v^{(i)} = \sin(kr + \delta_i)/\sin\delta_i$
(da notare che $v^{(1)} \xrightarrow[r\to 0]{} 1 \neq 0$)

Moltiplicando la 1ª per $v^{(2)}$ e la 2ª per $v^{(1)}$ e sottraendo si trova

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(v^{(2)}\frac{d^2}{dr^2}v^{(1)} - v^{(1)}\frac{d^2}{dr^2}v^{(2)}\right) = (E_1 - E_2)\left(v^{(1)}v^{(2)}\right)$$

integrando tra 0 ed R si ottiene

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(v^{(2)}\frac{d}{dr}v^{(1)} - v^{(1)}\frac{d}{dr}v^{(2)}\right)_0^R = (E_1 - E_2)\int_0^R dr\, v^{(1)}v^{(2)}$$

Sottraiamo questa eq. da quella per le $u^{(1)}u^{(2)}$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\left(u^{(2)}\frac{d}{dr}u^{(1)} - u^{(1)}\frac{d}{dr}u^{(2)}\right) - \left(v^{(2)}\frac{d}{dr}v^{(1)} - v^{(1)}\frac{d}{dr}v^{(2)}\right)\right]_0^R = (E_1 - E_2)\int_0^R dr\left(u^{(1)}u^{(2)} - v^{(1)}v^{(2)}\right)$$

da notare che per $R \gg$ range del potenziale
dove $u^{(i)} = \sin(k_i r + \delta_i)$ otteniamo $u^{(i)} = v^{(i)}$

Quindi si ottiene

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(v^{(2)}\frac{d}{dr}v^{(1)} - v^{(1)}\frac{d}{dr}v^{(2)}\right)_{r=0} = (E_1 - E_2)\int_0^R dr\left(u^{(1)}u^{(2)} - v^{(1)}v^{(2)}\right) \qquad (1)$$

inoltre $u^{(1)}u^{(2)} - v^{(1)}v^{(2)} \to 0$ per $r \gg$ range del potenziale
e quindi nell'integrale possiamo prendere tranquillamente $R \to \infty$. Inoltre dall'espressione esplicita di v

$$\left.\frac{d}{dr}v^{(i)}\right|_{r=0} = \left.\frac{k_i\cos(k_i r + \delta_i)}{\sin\delta_i}\right|_{r=0} = k_i \cot\delta_i$$

$$\left[\; k_1\cot\delta_1 - k_2\cot\delta_2 = (k_1^2 - k_2^2)\int_0^\infty dr\left(u^{(1)}u^{(2)} - v^{(1)}v^{(2)}\right) \qquad (2)\right.$$

questa espressione è <u>esatta</u>.

Consideriamo il caso particolare

$$k_1 = k \qquad k_2 = 0$$

per $k_2 \to 0$ $\quad k_2\cot\delta_2 \sim \frac{k_2}{\delta_2} \to -\frac{1}{a}$

$$v^{(2)}(r) \to \frac{\sin(k_2 r - k_2 a)}{\sin(-k_2 a)} = \frac{r-a}{-a} = 1 - \frac{r}{a} \equiv v^0(r)$$

onde la $u^{(2)} \to$ ben definita $\equiv u^0 \leftarrow$ (soluzione ad energia 0)

$$u^{0}(r) \to 1 - r/a$$

$$k \cot g\,\delta = -\frac{1}{a} + k^2 \int_0^\infty dr\,\left(u^{(1)}u^{(0)} - v^{(1)}v^{(0)}\right)$$

l'integrale dipende ancora da $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$,
perchè $u^{(1)}$ è la soluzione per quella energia.
Supponiamo k ~~molto~~ piccolo

$$u^{(1)}(r) \simeq u^{0}(r) + O(k^2) \qquad v^{(1)} \simeq v^{0} + O(k^2)$$

$$k \cot g\,\delta \Big|_{k\to 0} = -\frac{1}{a} + k^2 \underbrace{\int_0^\infty dr\left[(u^0)^2 - (v^0)^2\right]}_{\frac{1}{2} r_0} + O(k^4)$$

r_0 raggio efficace ; dimensioni $\to$ distanza

$$k \cot g\,\delta \Big|_{k\to 0} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} k^2 r_0 + O(k^4)$$

dipendenza di $\delta_{\ell=0}$ dall'energia per k piccoli

Stati $l=0$

$S=0$ $\quad l=0$ $\quad$ singoletto $\quad (T=1)$ — pp, pn, nn

$S=1$ $\quad l=0$ $\quad$ tripletto $\quad T=0 \rightarrow$ solo pn

potenziali come nel deutone

Se c'è simmetria per la carica la forza per $S=0$ $l=0$ $T=1$ è la stessa

$$a^{pp}_{S=0} = a^{pn}_{S=0} = a^{nn}_{S=0}$$

$$r_0{}^{pp}_{S=0} = r_0{}^{pn}_{S=0} = r_0{}^{nn}_{S=0}$$

$a_S^{pp} = -17.2$ fm $\pm .04$

$a_S^{pn} = -23.715$ f $\pm .015$

$a_S^{nn} = -18.55 \pm .05$

$-18.7 \pm .3$

(da esperimenti
$n + d \rightarrow n + n + p$
$\pi^- + d \rightarrow n + n$)

$a_t^{pn} = 5.423$ fm $\pm .005$

$r_{0t} = 1.73$ fm $\pm .02$

$r_0^{pp} = 2.794 \pm .015$

$r_0^{pn} = 2.73 \pm .03$

$r_0^{nn} = 2.84 \pm .003$

Modifico: prendiamo $E_2 < 0 \Rightarrow$ stato legato $E_2 = -B$

$$u_B \equiv \begin{cases} u^{(2)}(r) \to e^{-\alpha r} & \frac{\hbar^2\alpha^2}{2\mu} = B = \text{energia di legame} \\ u^{(2)}(0) = 0 & \text{funzione d'onda dello stato \underline{legato}} \end{cases}$$

$v_B \equiv v^{(2)}(r) = e^{-\alpha r}$ soluzione dell'eq (*) con $V=0$

- Di nuovo poniamo $k_1 = k$ $\quad E_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} > 0$

Dall'eq. (1)

$$v^{(1)}(0) = v^{(2)}(0) = 1$$

$$\frac{d}{dr} v^{(2)} \Big|_{r=0} = -\alpha \frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r}} \Big|_{r=0} = -\alpha$$

$$\frac{d}{dr} v^{(1)} \Big|_{r=0} = k \frac{\cos(kr+\delta)}{\sin\delta} \frac{1}{\frac{\sin(kr+\delta)}{\sin\delta}} \Bigg|_{r=0} = k \cot\delta$$

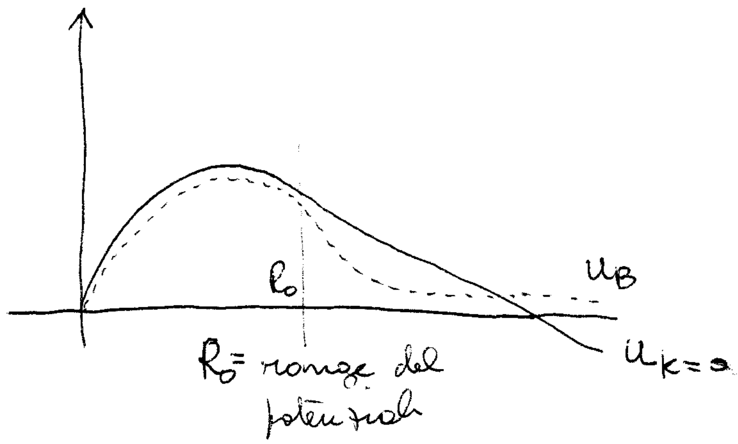
Quindi si ottiene l'espressione <u>esatta</u>

$$+ k\cot\delta + \alpha = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E_1 - E_2) \int_0^\infty dr \left[u^{(1)}u^{(2)} - v^{(1)}v^{(2)}\right] \qquad (3)$$

Supponiamo ora che $k \to 0$

$$-\frac{1}{a} + \alpha = \alpha^2 \int_0^\infty dr \left(u_{k=0}\, u_B - v_{k=0}\, v_B \right)$$

Se lo stato legato è debolmente legato (come il deutone)



si può supporre che $u_B \simeq u_{K=0}$ dove $r \leq R_0$

R_0 = distanza per la quale $V(R) = 0$ $R \geq R_0$

Da notare che la nostra scelta di $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ è tale che

$$\begin{cases} v_{K=0} = u_{K=0} & \text{per } R > R_0 \\ v_B = u_B & \end{cases}$$

Quindi l'integrale (3) va calcolato per $r \leq R_0$

Definito

$$\int_0^\infty dr \, (u_{K=0}^2 - v_{K=0}^2) = \frac{1}{2} r_0$$

si ha

$$-\frac{1}{a} + \alpha = \alpha^2 \frac{r_0}{2} \qquad \frac{1}{a} = \alpha - \frac{1}{2} r_0 \alpha^2$$

deutone $\alpha = \sqrt{\frac{2\mu B}{\hbar^2}} = .23 \text{ fm}^{-1}$

$\frac{1}{a} = .1844$ $\quad$ ∴ $\frac{1}{2} r_0 \alpha^2 = 045 \text{ fm}^{-1}$ $\quad$ $\alpha - \frac{1}{2} r_0 \alpha^2 = .184 \text{ fm}^{-1}$