Radioattività

N nuclei

la probabilità di decadimento per ognuno di essi è

1) indipendente dallo stato degli altri nuclei
2) indipendente dalla vita passata del nucleo

Probabilità di decadimento tra t e t+dt

$$= \lambda \, dt$$

$\downarrow$

costante di decadimento (sec^{-1})

per gli organismi biologici non è così!

Numero di nuclei che decade tra t e t+dt

$$= N \lambda \, dt$$

$$dN = - N\lambda \, dt$$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

half life $\quad N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} =$

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \qquad -\lambda t_{1/2} = \ln 1/2$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{.693}{\lambda}$$

Ro - 2

$$\text{vita media} = \frac{\int_0^\infty t\, e^{-\lambda t}\, dt}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt} = \frac{1}{\lambda} = \bar{t}$$

<u>Larghezza</u>

se un nucleo è in uno stato eccitato con costante di decadimento λ esso decadrà con probabilità λdt. Non possiamo predirre quanto vivrà, avremo solo che se un grande numero di nuclei $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Δt = incertezza sulla vita dello stato eccitato $\sim \bar{t}$

quindi $\quad \Delta E\, \Delta t \sim \hbar \qquad \Delta E \sim \lambda \hbar$

$$\Delta E \sim \lambda \hbar \qquad \hbar \sim 6.6\ 10^{-22}\ \text{MeV} \cdot \text{sec}$$

$$\sim \frac{\lambda\ 200\ \text{MeV} \cdot \text{f}}{3 \cdot 10^{10}\ 10^{13}\ \frac{\text{fm}}{\text{sec}}} = \lambda \cdot \left(\frac{2}{3}\ 10^{-21}\right) \text{MeV} \cdot \text{sec}$$

$$\Delta E = 1\ \text{MeV} \qquad \lambda = \frac{3}{2}\ 10^{21}\ \text{sec}^{-1}$$

$$\bar{t} = \frac{2}{3}\ 10^{-21}\ \text{sec}$$

Dal punto di vista quantistico, si può pensare che la funzione d'onda al tempo t abbia un andamento temporale del tipo:

$$|\psi(r,t)|^2 = |\psi(r,0)|^2 e^{-\lambda t}$$

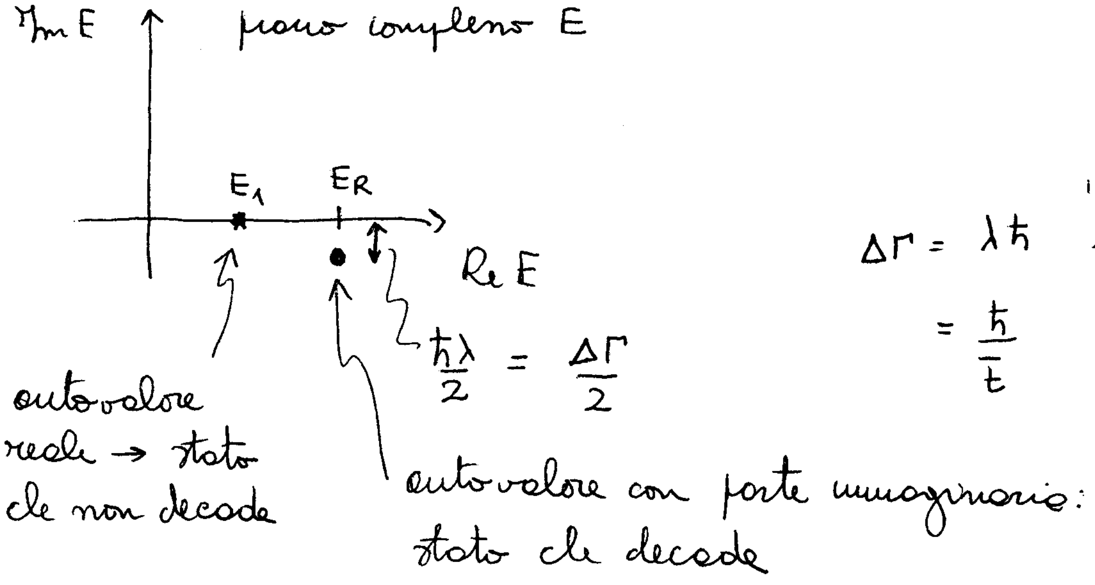
dalla legge esponenziale di decadim.

per cui
$$\psi(r,t) = \psi(r,0)\, e^{-i\left(E_R - \frac{i\hbar}{2}\lambda\right)\frac{t}{\hbar}}$$

Poiché $\psi(r,t)$ deve verificare

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

ne segue che $E = E_R - i\frac{\hbar\lambda}{2}$ è l'autovalore di H che quindi diventa complesso. λ = parte immaginaria



$$\Delta\Gamma = \lambda\hbar \quad \text{"larghezza"}$$
$$= \frac{\hbar}{t}$$

Distribuzione di decadimento

Al tempo $t = 0$ il nucleo è in uno stato instabile descritto dalla f.d.o. ψ_0

I possibili stati finali sono descritti dalle f.d.o. ψ_n

. .

$$\int \psi_n^* \psi_m = \delta_{nm} \qquad n, m \geq 0$$

$\psi_n \quad n = 0, \ldots$ non sono autostati di H ma

sono autostati di H_0 con $H = H_0 + V$ $\quad V \to$ perturbazione

$$H_0 \psi_n = \varepsilon_n \psi_n \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Definiamo $E_n = \langle \psi_n | H | \psi_n \rangle = \varepsilon_n + \langle \psi_n | V | \psi_n \rangle$ (1)

V è responsabile dei "salti" tra ψ_0 e $\psi_1, \ldots$

Al tempo t la f.d.o. è data da una sovrapposizione fra tutti gli stati

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\, e^{-i E_n t/\hbar}\, \psi_n(\bar{x}) \qquad (2)$$

dove il fattore di fase è stato introdotto per convenienza.

Usiamo l'eq. di Schroedinger dipendente dal tempo per determinare la dipendenza temporale delle a

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi$$

$$i\hbar \sum_n \left(\dot{a}_n e^{-iE_nt/\hbar} - \frac{iE_n}{\hbar} a_n e^{-iE_nt/\hbar} \right) \psi_n$$

$$= \sum_n a_n e^{-iE_nt/\hbar} H \psi_n$$

Moltiplichiamo per ψ_m^* e integriamo usando il fatto che i ψ_n sono una base ortonormale (sono autostati di H_0)

$$i\hbar \left(\dot{a}_m - i\frac{E_m}{\hbar} a_m \right) e^{-iE_mt/\hbar} = \sum_n a_n e^{-iE_nt/\hbar} H_{mn} \quad (3)$$

con $\quad H_{mn} = \langle \psi_m | H | \psi_n \rangle$

$$= E_n \delta_{mn} + \langle \psi_m | V | \psi_n \rangle$$

$$i\hbar \dot{a}_m e^{-\frac{iE_mt}{\hbar}} + E_m a_m e^{-iE_mt/\hbar}$$

$$= a_m e^{-iE_mt/\hbar} H_{mm} + \sum_{n \neq m} a_n e^{-iE_nt/\hbar} H_{mn}$$

che si semplifica in (visto che abbiamo definito $H_{mm} = E_m$)

Distribuzione di decadimento

Al tempo $t=0$ il nucleo è in uno stato instabile descritto dalla f.d.o. ψ_0

I possibili stati finali sono descritti dalle f.d.o. ψ_n

$$\int \psi_n^* \psi_m = \delta_{nm} \qquad n, m \geq 0$$

$\psi_n \quad n=0,\dots$ non sono autostati di H ma sono autostati di H_0 con $H = H_0 + V \quad V \to$ perturbazione

$$H_0 \psi_n = \mathcal{E}_n \psi_n \qquad n=0,1,\dots$$

Definiamo $E_n = \langle \psi_n | H | \psi_n \rangle = \mathcal{E}_n + \langle \psi_n | V | \psi_n \rangle$ (1)

V è responsabile dei "salti" tra ψ_0 e $\psi_1, \dots$

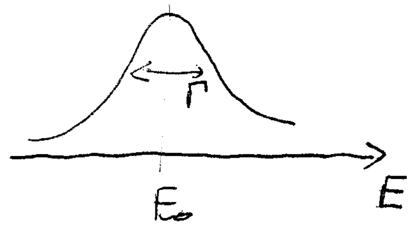
Al tempo t la f.d.o. è data da una sovrapposizione fra tutti gli stati

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\, e^{-iE_n t/\hbar}\, \psi_n(\bar{x}) \qquad (2)$$

dove il fattore di fase è stato introdotto per convenienza.

probabilità di trovare popolato lo stato m

$$P_m = |a_m(t)|^2 = \frac{|H_{m0}|^2}{(E_m - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$



$$\Gamma = \frac{\hbar}{\lambda}$$

$$BW = \frac{\Gamma/2\pi}{(E-E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE \; BW(E) = 1$$