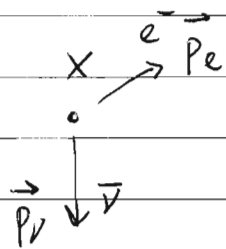


Teoria di Fermi del decadimento β $X \rightarrow Y + e^- + \bar{\nu}$ 1



- i nuclei X e Y sono approssimati di massa infinite

L'interazione è scritta come $V_{\text{DEBOL}} = V + V^+$ (con $\bar{\psi}$ è hermitiano)

$$V = \sum_{i=1}^A G_F \tau_+(i) \left(1_i \vec{P}_0 + G_A \vec{\sigma}_i \cdot \vec{P} \right) \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_e) \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_{\bar{\nu}}) \quad (1)$$

1) dove $\tau_+(i)$ = operatore di salto dell'isospin

$$\tau_+(i) = \frac{\tau_x(i) + i \tau_y(i)}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

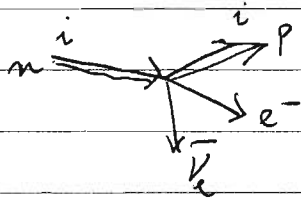
$$\tau_+(i) | \text{particella } i = \text{neutrone} \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{protoni}$$

$$\tau_+(i) | \text{particella } i = \text{protoni} \rangle = 0$$

L'interazione V è quindi responsabile del decadimento β^- ,
 V^+ contiene $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau_-(i)$ e produce il decadimento β^+

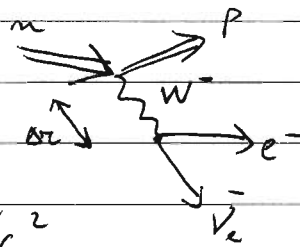
Notiamo che V è costituita da una somma su tutti i nucleoni $\rightarrow$ ~~ogni~~ ~~nucleone~~ la probabilità di transizione di $X \rightarrow Y$ sarà uguale alla somma di probabilità $n \rightarrow p$ ecc. (non ci sono effetti "a 2 corpi" cioè dovuti alla presenza di un altro nucleone vicino a quello che decade).

- 2) la dipendenza delle coordinate $\vec{r}_i, \vec{r}_e, \vec{r}_\nu$ è data dalle 2 delta: l'interazione è puntuale



e^- e ν sono creati nel punto esatto dove n trova il neutrone quando n trasforma in protone

con la teoria moderna:



ma il W^- ha massa molto grande $M_W \approx 80 \text{ GeV}/c^2$ ed essendo una particella virtuale può percorrere un tratto (vedi teoria di Yukawa)

$$\Delta r = \frac{\hbar}{M_W c} = \frac{\hbar c}{M_W c^2} \approx \frac{200 \text{ MeV fm}}{80000 \text{ MeV}} \approx 0.002 \text{ fm}$$

$$3) \vec{O} = 1_i \cdot \vec{\Gamma}_0 + C_A \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\Gamma} \quad (3)$$

descrive la dipendenza di V dagli operatori di spin, impulso, ... del nucleone i e dei 2 leptoni.

1_i = operatore identità ; C_A = costante da determinare adimensionale

$\vec{\sigma}_i$ = matrici di Pauli che agiscono sullo stato di spin del nucleone i

$\vec{\Gamma}_0, \vec{\Gamma}$ operatori che agiscono sulla funzione d'onda dei leptoni; dipendono dallo stato di spin ed impulso

la loro funzione principale è di "creare" i leptoni, cioè servono un elemento di matrice

$$\langle \psi_e \psi_\nu | \Gamma_0 | 0 \rangle \neq 0$$

↑
 stato finale
 con l'elettrone con
 impulso $\vec{p}_e$ e proiezione
 di spin $\sigma_e = \pm \frac{1}{2}$, ecc.

↑
 stato iniziale con ~~nessa~~ nessa lepton

Da notare che σ è uno scalare per notazioni spaziali

($\Gamma_0 = \text{scalare / pseudoscalare}$, $\vec{\Gamma} = \text{operatore vettoriale / assiale}$)

In generale σ contiene termini ulteriori dipendenti dall'impulso del nucleone i , ~~con~~ tipo

$$\propto C_p \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{\Gamma}}{M_N} + \dots \quad (4)$$

$C_p = \text{altra costante adimensionale}$

poiché nel nucleo $|\vec{p}_i| \ll M_N$, questi termini in genere si trascurano.

Gli operatori $\Gamma_0, \vec{\Gamma}$ sono ben conosciuti (teoria di unificazione elettrodebole di Glashow-Weinberg-Salam);

Il valore della costante C_A (e $C_p, \dots$) dipende dalla struttura dei nucleoni in termini di quarks. Se i nucleoni fossero puntiformi $C_A = -1$.

L'elemento di matrice

Troteremo V_{DEBOL} con la teoria delle perturbazioni al 1° ordine.

$$H_0 = T + V_{\text{NUCLEARE}} + V_{\text{COULOMB}} \quad (5)$$

$$dW_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | V | i \rangle|^2 \delta(E_i - E_f) \frac{\Omega d^3 p_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\Omega d^3 p_\nu}{(2\pi\hbar)^3} \quad (6)$$

$$\begin{cases} |i\rangle = \psi_X(1, \dots, A) |0\rangle \\ |f\rangle = \psi_Y(1, \dots, A) \frac{e^{-i\vec{p}_e \cdot \vec{r}_e / \hbar}}{\sqrt{\Omega}} |X_{\sigma_e}\rangle \frac{e^{-i\vec{p}_\nu \cdot \vec{r}_\nu / \hbar}}{\sqrt{\Omega}} |X_{\sigma_\nu}\rangle F(p_e, z_Y) \end{cases}$$

Fattore correttivo
Coulombiano
↓

ψ_X e ψ_Y sono le funzioni d'onda dei nuclei X e Y (ricordiamo che stiamo approssimando i nuclei X e Y come molto pesanti e quindi trascuriamo il rinculo)

$$|X_{\sigma_e}\rangle = \text{stato di spin dell'elettrone} \quad |X_{+\frac{1}{2}}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |X_{-\frac{1}{2}}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e lo stesso per il neutrino. $F(p_e, z_Y)$ tiene conto (appross.) dell'interazione Coulombiana tra il nucleo Y (di carica z_Y) ed il e^- .

Lo stato $|0\rangle$ che compare in $|i\rangle$ rappresenta il fatto che all'inizio non ci sono leptoni. Studiamo ora

$$\langle f | V | i \rangle =$$

$$= \int d^3 r_1 \dots d^3 r_A d^3 r_e d^3 r_\nu \psi_Y^* e^{-i\vec{p}_e \cdot \vec{r}_e / \hbar - i\vec{p}_\nu \cdot \vec{r}_\nu / \hbar} F^*(p_e, z_Y) \langle X_{\sigma_e} X_{\sigma_\nu} | \frac{1}{r}$$

$$\sum_i G_F \tau_i(i) (\Gamma_0 + G_A \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\Gamma}) \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_e) \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_\nu) \psi_X |0\rangle$$

Potremo eseguire le integrazioni su $\vec{p}_e$ e $\vec{p}_\nu$, ottenendo

$$\langle f | V | i \rangle = \frac{G_F}{\Omega} \int d^3 r_1 \dots d^3 r_A \sum_{i=1}^A \psi_Y^* e^{-i(\vec{p}_e + \vec{p}_\nu) \cdot \vec{r}_i / \hbar} \psi_X^* F(\vec{p}_e, \vec{p}_\nu) \quad (7)$$

$$\langle X \sigma_e X \sigma_\nu | \vec{p}_0 + G_A \vec{\sigma}_i \cdot \vec{p} | 0 \rangle \psi_X^*$$

Notiamo che $r_i \leq R$ dove R = raggio del nucleo X o Y
 in quanto ψ_X e ψ_Y sono le funzioni d'onda di stato legato
 e quindi vanno a zero per $r_i \gg R$.

Inoltre $p_e c \leq p_{\max} c$ dove

$$p_{\max} = \sqrt{(p_{\max} c)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 \approx Q$$

poiché tipicamente $Q \approx 1 \text{ MeV}$ e $m_e c^2 \approx 0.5 \text{ MeV}$
 si trova $p_{\max} c \approx 1 \text{ MeV}$. Lo stesso discorso vale
 per $p_\nu c$, per cui.

$$\left| \frac{(\vec{p}_e + \vec{p}_\nu) \cdot \vec{r}_i}{\hbar} \right| \lesssim \frac{p_{\max} c \cdot R}{\hbar c} \approx \frac{1 \text{ MeV} \cdot 10 \text{ fm}}{200 \text{ MeV fm}} \approx \frac{1}{20}$$

l'espressione all'esponente quindi è sempre molto piccola

Introduciamo

$$\vec{q} = \frac{\vec{p}_e + \vec{p}_\nu}{\hbar}$$

$$e^{-i \vec{q} \cdot \vec{r}_i} \approx 1 - i \vec{q} \cdot \vec{r}_i + \frac{1}{2} (-i \vec{q} \cdot \vec{r}_i)^2 + \dots \quad (8)$$

Vediamo cosa succede se facciamo l'approssimazione
 estrema $e^{-i \vec{q} \cdot \vec{r}_i} \approx 1$ detta delle transizioni fermene

Introduciamo gli elementi di matrice

$$\begin{cases} M_F = \int d^3r_i \dots d^3r_A \sum_{i=1}^A \psi_Y^* \tau_+(i) \psi_X & \text{"Fermi"} \\ \vec{M}_{GT} = \int d^3r_i \dots d^3r_A \psi_Y^* \sum_i \tau_+(i) \vec{\sigma}_i \psi_X & \text{"Gamow Teller"} \end{cases} \quad (9)$$

($\vec{M}_{GT}$ è un "vettore" in quanto sono tre elementi di matrice, per σ_x, σ_y e σ_z , rispettivamente)

Ritorniamo all'elemento di matrice

$$\langle f | V | i \rangle = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\langle X_{Ge} X_{\nu} | M_0 | 0 \rangle M_F + \langle X_{Ge} X_{\nu} | \vec{M} | 0 \rangle \cdot \vec{M}_{GT} \right] F(p_e, p_\nu)^* \quad (10)$$

Ci sono delle regole generali per che bilineari in M_F e/o $\vec{M}_{GT}$ sono zero o diversi da zero. Queste derivano dal fatto che

- ψ_X e ψ_Y sono ^{autostati} del momento angolare totale J e della parità
- vale il teorema di Wigner-Eckart che dice che

$$\langle J_X M_X | O_{JM} | J_Y M_Y \rangle \neq 0 \quad \text{solo se} \quad (11)$$

$$|J - J_Y| \leq J_X \leq J + J_Y$$

dove O_{JM} è un operatore che sotto rotazioni si trasforma come un tensore di rango J , per esempio:

$$O_{J=0} = \text{scalare} \quad O_{J=1} = \text{operatore vettoriale, ad esempio } \vec{\sigma}_i$$

- Abbiamo le seguenti regole di selezione per il momento angolare

$$\begin{cases} M_F \neq 0 & \text{solo se } J_x = J_y \\ M_{GT} \neq 0 & \text{solo se } |J_y - 1| \leq J_x \leq J_y + 1 \text{ quindi } |J_x - J_y| \leq 1 \\ & \text{escluso però il caso } J_x = J_y = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Nel caso M_F , l'operatore $\sum_{i=1}^A \tau_i^{(1)}$ è uno scalare ($J=0$)

nel caso di Gamow Teller $\sum_{i=1}^A \tau_i^{(1)} \vec{\sigma}_i$ è vettoriale ($J=1$).

- Inoltre generalmente i sistemi nucleari hanno una parità definita, cioè

$$\psi_x(-\vec{r}_1, \dots, -\vec{r}_A) = \pi_x \psi_x(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \quad \pi_x = \pm 1$$

e lo stesso per ψ_y (parità = π_y). Supponiamo ~~di trascurare~~
 $\sigma_{JM}(-\vec{r}_1 \dots -\vec{r}_A) = \pi_0 \sigma_{JM}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_A)$, di nuovo con $\pi_0 = +1$ o -1 .

$$\langle 0 \rangle = \int d^3\vec{r}_1 \dots d^3\vec{r}_A \psi_y^* \sigma_{JM}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \psi_x$$

ridefiniamo $\vec{r}_1 = -\vec{r}_1$ ecc ecc (sono variabili d'integrazione)

$$\int_{\Omega} d^3\vec{r}_1 \rightarrow \int_{\Omega} d^3(-\vec{r}_1) = \int_{\Omega} d^3\vec{r}_1 \quad \text{quindi}$$

$$\begin{aligned} \langle 0 \rangle &= \int d^3\vec{r}_1 \dots d^3\vec{r}_A \psi_y^*(-\vec{r}_1 \dots -\vec{r}_A) \sigma_{JM}(-\vec{r}_1 \dots -\vec{r}_A) \psi_x(-\vec{r}_1 \dots -\vec{r}_A) \\ &= \int d^3\vec{r}_1 \dots d^3\vec{r}_A \pi_y \psi_y \pi_0 \sigma_{JM}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_A) \pi_x \psi_x = \pi_y \pi_0 \pi_x \langle 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\text{quindi } \pi_y \pi_0 \pi_x = 1 \text{ altrimenti } \langle 0 \rangle = 0 \quad (13)$$

Nel caso di MF, chiaramente $\pi_0 = +1$ quindi $\pi_x = \pi_y$;
 nel caso MG, $0 = \sum_i \tau_i(r) \vec{G}_i$, ancora $\pi_0 = +1$ e $\pi_x = \pi_y$

• In summary

$$\begin{cases} MF \neq 0 & \text{also } J_x = J_y \quad \pi_x = \pi_y \quad \text{esempio } 0^+ \rightarrow 0^+, 1^- \rightarrow 1^- \\ MG \neq 0 & \text{also } |J_x - J_y| \leq 1, 0 \rightarrow 0 \text{ escluso}, \pi_x = \pi_y \quad (14) \end{cases}$$

esempio $0^+ \rightarrow 1^+$, ecc.

Transizioni proibite

Come succede se $M_F = M_G = 0$ per via delle regole di selezione?

In questo caso l'approssimazione $e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} \approx 1$ non è sufficiente
 ma bisogna considerare i termini successivi

$$e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} = \sum_{L, M} 4\pi (-i)^L Y_{LM}(\hat{q}) Y_{LM}^*(\hat{r}) J_L(qr) \quad (15)$$

come abbiamo detto $qr \ll 1$ e si può approssimare $J_L(qr) \approx \frac{(qr)^L}{(2L+1)!!}$

quindi i termini con $L > 0$ danno contributi

soppressi di un fattore $\sim (qR)^L$, sono quindi chiamate
 transizioni proibite. In questo caso il contributo più
 importante proviene dal primo termine che non viene nullo

L'elemento di matrice in generale diventa

$$\langle f | V | i \rangle = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{LM} \sqrt{4\pi} (-i)^L Y_{LM}(\hat{q}) \left[M_F^{(LM)} \langle X_{G_e} X_{G_\nu} | \vec{P}_0 | 0 \rangle + \vec{M}_{GT}^{(LM)} \langle X_{G_e} X_{G_\nu} | \vec{P} | 0 \rangle \right] F(p_e, p_\nu) \quad (16)$$

$$\begin{cases} M_F^{(LM)} = \sqrt{4\pi} \int d^3r_1 \dots d^3r_A \Psi_Y^* \left[\sum_{Li} Y_{LM}^*(\hat{r}_i) j_L(qr_i) \tau_i(i) \right] \Psi_X \\ \vec{M}_{GT}^{(LM)} = \sqrt{4\pi} \int d^3r_1 \dots d^3r_A \Psi_Y^* \left[\sum_i Y_{LM}^*(\hat{r}_i) j_L(qr_i) \tau_i(i) \vec{\sigma}_i \right] \Psi_X \end{cases} \quad (17)$$

Chiaramente per $M_F^{(LM)}$, l'operatore di cui si calcola l'elemento di matrice è $\sum_i Y_{LM}^*(\hat{r}_i) j_L(qr_i) \tau_i(i)$

$$\begin{cases} \text{rotte rotazioni} \rightarrow \text{tensore di rango } L \rightarrow \text{regole di sel. } |J_x - L| \leq J_Y \leq J_x + L \\ \text{rotte parit } \rightarrow \text{l'operatore ha } \Pi_0 = (-)^L \rightarrow \Pi_x \Pi_Y (-)^L = 1 \end{cases} \quad (18)$$

per esempio $J_x^{\Pi_x} = 0^+$ $J_Y^{\Pi_Y} = 1^-$, $M_F^{(L=0)} = 0$, mentre

$$M_F^{(L=1)} \neq 0.$$

per esempio $J_x^{\Pi_x} = 1^+$ $J_Y^{\Pi_Y} = 3^+$

gli L possibili sono $L=2, 3, 4$

ma si deve verificare $\Pi_x \Pi_Y (-)^L = 1$

$$(+1)(+1)(-)^L = 1 \quad \text{solo } L=2 \text{ e } L=4$$

la transizione $L=4$ ha un contributo + piccolo.

Lo spazio delle fasi

Per semplicità nel seguito consideriamo solo le transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$

Quindi:

$$\langle f | V | i \rangle = \frac{G_F}{\Omega} \langle \chi_{\sigma_e} \chi_{\sigma_\nu} | M_0 | 0 \rangle M_F F^*(p_e, p_\nu) \quad (19)$$

in quanto $M_{GT} = 0$. Delle regole d'oro di Fermi

$$dW(\vec{p}_e, \vec{p}_\nu, \sigma_e, \sigma_\nu) = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{G_F^2}{\Omega^2} |\langle \chi_{\sigma_e} \chi_{\sigma_\nu} | M_0 | 0 \rangle|^2 |M_F|^2 |F(p_e, p_\nu)|^2 \delta(M_X c^2 - M_F c^2 - m_e c^2 - T_e - p_\nu c) \frac{\Omega d^3 p_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\Omega d^3 p_\nu}{(2\pi\hbar)^3} \quad (20)$$

dove $E_e = \sqrt{(m_e c^2)^2 + p_e^2 c^2}$, è l'energia dell'elettrone, è stato scritto come $T_e + m_e c^2$, mentre $E_\nu = p_\nu c$ in quanto per il momento assumiamo $m_\nu = 0$. Inoltre si è supposto il nucleo figlio come molto pesante e abbiamo trascurato l'energia cinetica di rinculo.

$dW(\vec{p}_e, \vec{p}_\nu, \sigma_e, \sigma_\nu)$ dà la probabilità nell'unità di tempo che il nucleo X decada emettendo un elettrone di impulso $\vec{p}_e$ e proiezione di spin σ_e ed un neutrino con impulso $\vec{p}_\nu$ e proiezione di spin σ_ν .

Sperimentalmente si conosce $dN_e/dp_e =$ (numero di elettroni emessi con un certo modulo di impulso p_e) al secondo, che si ottiene da $W(\vec{p}_e, \vec{p}_\nu, \sigma_e, \sigma_\nu)$ sommando (o integrando) su $\sigma_e, \sigma_\nu, \vec{p}_\nu$ e $\hat{p}_e$

$$dW(p_e) = \sum_{\sigma_e \sigma_\nu} \int_{\vec{p}_\nu} \int_{\hat{p}_e} dW(\vec{p}_e, \vec{p}_\nu, \sigma_e, \sigma_\nu) \quad (21)$$

Dalla teoria dell'interazione debole, l'elemento di matrice ^{normalizzato su $\sigma_e \sigma_\nu$} dei leptoni è dato da:

$$\sum_{\sigma_e \sigma_\nu} \left| \langle \chi_{\sigma_e} \chi_{\sigma_\nu} | M_0 | 0 \rangle \right|^2 = 1 + \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu}{E_e E_\nu} \quad (22)$$

Inoltre $|M_F|^2$ non dipende da $\vec{p}_e$ e $\vec{p}_\nu$ e quindi possiamo integrare facilmente su $\hat{p}_e$ e $\hat{p}_\nu$;

$$\int d\hat{p}_e d\hat{p}_\nu \left(1 + \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu}{E_e E_\nu} \right) = (4\pi)^2 \quad (23)$$

Quindi:

$$dW(p_e) = \frac{2\pi}{\hbar} G_F^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} |M_F|^2 |F|^2 \int_{p_\nu} \delta(Q - T_e - p_\nu c) p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} G_F^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} |M_F|^2 |F|^2 p_e^2 \frac{(Q - T_e)^2}{c^3} dp_e$$

$$\frac{dW(p_e)}{dp_e} = \frac{2\pi}{\hbar} G_F^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} |M_F|^2 p_e^2 \frac{(Q - T_e)^2}{c^3} |F(p_e, \gamma)|^2 \quad (24)$$

Il plot di Kurie

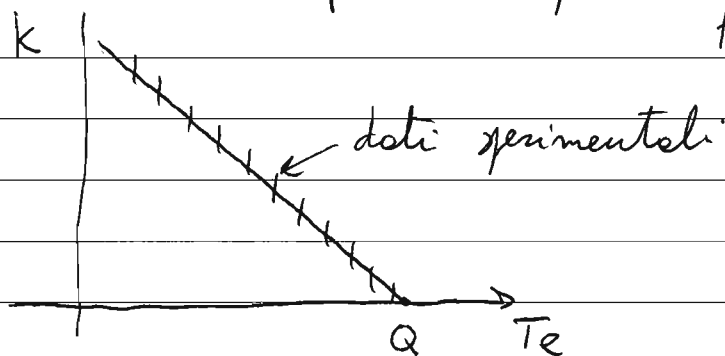
$\frac{dW(p_e)}{dp_e}$ è proporzionale a $\frac{dN(p_e)}{dp_e}$, poniamo quindi:

confrontare il risultato ottenuto con i dati sperimentali.

In questo caso conviene riportare nel grafico la seguente quantità:

$$K = \sqrt{\frac{dN_e/dp_e}{p_e^2 |F(p_e, Z_f)|^2}} \propto \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar} G_F^2 (4\pi)^2 \frac{|MF|^2}{(2\pi\hbar)^6 c^3}} (Q - T_e) \quad (25)$$

In funzione di T_e , K dovrebbe avere un andamento lineare, cosa che è confermata sperimentalmente per le transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$.



L'effetto di $F(p_e, Z_f)$ è importante solo per piccoli valori di T_e , dal momento che l'elettrone muovendosi più lentamente risente di più del campo Coulombiano del nucleo figlio.

Il plot di Kurie per transizioni proibite

In caso di transizioni proibite, l'elemento di matrice è generalmente ben approssimato (usando l'espressione (16) di pag 9) dal termine di L minore per cui $M_F^{(LM)}$ o $M_{GT}^{(LM)} \neq 0$

Supponiamo che sia L_0 questo valore e che $M_{GT}^{(L_0 M)} = 0$ per $L = L_0$ per semplicità

$$\begin{cases} M_F^{(LM)} = 0 & \text{per } L < L_0 \text{ cioè } L = 0, 1, \dots, L_0 - 1 \\ M_{GT}^{(LM)} = 0 & \text{per } L = 0, \dots, L_0 \end{cases} \quad (26)$$

Quindi:

$$\langle f | V | i \rangle \simeq \sum_n \frac{G_F}{\Omega} \sqrt{4\pi} (-i)^{L_0} Y_{L_0 M}(\hat{q}) M_F^{(L_0 M)} \langle x_{\sigma_e} x_{\sigma_\nu} | \Gamma_0 | 0 \rangle F \quad (27)$$

$$\begin{aligned} dW(\bar{p}_e, \bar{p}_\nu, \sigma_e, \sigma_\nu) &= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{G_F^2}{\Omega^2} (4\pi)^2 \sum_{n, n'} Y_{L_0 n}(\hat{q}) M_F^{(L_0 n)} Y_{L_0 n'}^*(\hat{q}) (M_F^{(L_0 n')})^* \\ &\quad |\langle x_{\sigma_e} x_{\sigma_\nu} | \Gamma_0 | 0 \rangle|^2 |F|^2 \delta(Q - T_e - p_\nu) \frac{\Omega d\bar{p}_e}{(2\pi\hbar)^2} \frac{\Omega d\bar{p}_\nu}{(2\pi\hbar)^2} \end{aligned} \quad (28)$$

come prima calcoliamo $dW(\bar{p}_e)$:

$$\sum_{\sigma_e \sigma_\nu} |\langle x_{\sigma_e} x_{\sigma_\nu} | \Gamma_0 | 0 \rangle|^2 = 1 + \frac{\bar{p}_e \cdot \bar{p}_\nu}{E_e E_\nu}$$

e definiamo (ricordiamo che $\vec{q} = (\bar{p}_e + \bar{p}_\nu)/\hbar$)

$$(4\pi)^2 S_{MH}^{L_0}(\bar{p}_e, \bar{p}_\nu) = (4\pi)^2 \int d\bar{p}_e d\bar{p}_\nu Y_{L_0 n}(\hat{q}) Y_{L_0 n'}^*(\hat{q}) \left(1 + \frac{\bar{p}_e \cdot \bar{p}_\nu}{E_e E_\nu}\right)$$

16

Prima di procedere però bisogna tenere conto che $M_F^{(L_0 \pi)}$ per $L_0 \neq 0$ dipende da q (si veda l'eq 17) e da $q = |\vec{p}_e + \vec{p}_\nu|/\hbar$

Notiamo però che per $qr_i \ll 1$ possiamo sviluppare la funzione di Bessel nell'eq. 17 tenendo solo il termine al primo ordine

$$J_{L_0}(qr_i) \simeq \frac{(qr_i)^{L_0}}{(2L_0+1)!!} \quad (29)$$

Definiamo

$$M_F^{(L_0 \pi)} = q^{L_0} \tilde{M}_F^{(L_0 \pi)}$$

$$\tilde{M}_F^{L_0 \pi} = \sqrt{4\pi} \int d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_A \Psi_T^* \left[\sum_i Y_{L_0}^*(\hat{r}_i) \frac{r_i^{L_0}}{(2L_0+1)!} \tau_i(1) \right] \Psi_X \quad (30)$$

$\tilde{M}_F^{L_0 \pi}$ è indipendente da q . Definiamo inoltre

$$(4\pi)^2 S_{\pi\pi'}^{L_0}(p_e, p_\nu) = 4\pi \int Y_{L_0}(\hat{q}) (Y_{L_0'}(\hat{q}))^* q^{2L_0} \left(1 + \frac{\vec{p}_e \vec{p}_\nu}{E_e E_\nu}\right) d\hat{p}_e d\hat{p}_\nu \quad (31)$$

Questo integrale si può calcolare analiticamente. Quindi:

$$\begin{aligned} \text{div.}(p_e) &= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{G_F^2 (4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \sum_{\pi\pi'} \tilde{M}_F^{(L_0 \pi)} (\tilde{M}_F^{L_0 \pi})^* S_{\pi\pi'}^{L_0}(p_e, p_\nu) \\ &\quad |F(p_e, z_r)|^2 p_e^2 dp_e \frac{(Q - T_e)^2}{c^3} \quad (32) \end{aligned}$$

Per $L_0 = 0$, si trova $S_{\pi\pi'}^{L_0} = 1$ e si ritorna al caso precedente