il Deutone

- energia di legame $B = -2.2246$ MeV
  - dalla differenza di massa
  - da $p + n \to {}^2H + \gamma$
  - da $\gamma + {}^2H \to p + n$

- spin e parità

  spin: interazione iperfine

  parità: dalla reazione di cattura pn

  spin $= 1$
  parità $= +$

$$\psi_d = \psi(\vec{r})\, \psi_p \psi_n$$

$$P\psi_d = \psi(-\vec{r})\, \underbrace{P\psi_p}_{+}\, \underbrace{P\psi_n}_{+} = +\psi_d$$

- momento magnetico e di quadrupolo

  dagli spettri atomici

- funzione d'onda

$$\Psi = \sum_{l,S} \frac{R_l(r)}{r} \left[Y_l(\hat{r})\, \chi_S \right]_{I=1, I_z}$$

$S = 0 \quad l = 1$

$S = 1 \quad l = 0, 1, 2$

i con $l = 1$ sono esclusi per la parità stati di spin di 2 particelle

protone $|\frac{1}{2}\, s_z\rangle$ autostato dell'operatore $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

$$\chi_{S S_z}(1,2) = \sum_{s_{1z} s_{2z}} \left(\tfrac{1}{2} s_{1z}\, \tfrac{1}{2} s_{2z} \middle| S S_z\right) |1; \tfrac{1}{2} s_{1z}\rangle\, |2; \tfrac{1}{2} s_{2z}\rangle$$

semplificazione: il primo ket è della particella 1, ... ecc
1/2 = valore dello spin viene omesso
$s_{1z} = +1/2 \rightarrow$ viene scritto solo $|+\rangle$ ecc

$$\chi_{00}(1,2) = \sum_{s_{1z} s_{2z}} \left(\tfrac{1}{2} s_{1z}\, \tfrac{1}{2} s_{2z} \middle| 0 0\right) |s_{1z}\rangle |s_{2z}\rangle$$

$$= \frac{|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} \chi_{11}(1,2) = |+\rangle|+\rangle \\ \chi_{10}(1,2) = \dfrac{|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle}{\sqrt{2}} \\ \chi_{1-1}(1,2) = |-\rangle|-\rangle \end{cases}$$

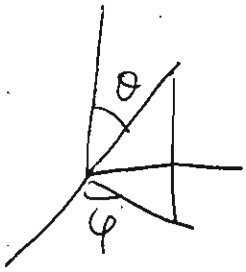
note $\chi_{00}(1,2) = -\chi_{00}(2,1)$

$$\chi_{1 S_z}(1,2) = +\chi_{1 S_z}(2,1)$$

$$\langle \chi_{S S_z} | \chi_{S' S'_z} \rangle = \delta_{S S'}\, \delta_{S_z S'_z}$$

Armoniche sferiche

parte spaziale della funzione d'onda



$$\psi(\vec r) = \sum_{lm} \frac{u_{nl}(r)}{r}\, Y_{lm}(\hat r)$$

espansione in armoniche sferiche $Y_{lm}(\hat r) \equiv Y_{lm}(\theta,\varphi)$

$$\nabla^2_r = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\hat L^2}{r^2} \qquad \hat L^2 =$$

$$\hat L^2 Y_{lm} = l(l+1)\, Y_{lm}$$

$\hat L$ operatore momento angolare orbitale $\hat L_z =$

- proprietà delle Y_{lm}

$$\int d\hat r\, Y^*_{lm} Y_{l'm'} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

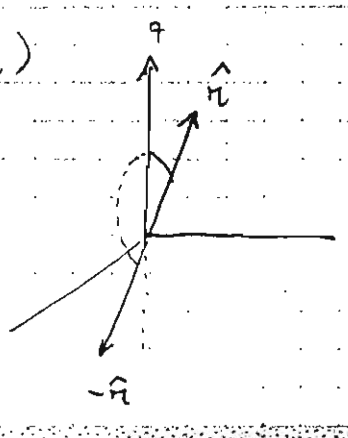
$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{1m} = \begin{cases} \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi} & m=\pm 1 \\ \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta & m=0 \end{cases}$$

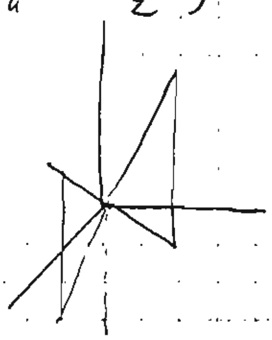
$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)$$

$$Y_{lm}(-\hat r) = (-1)^l\, Y_{lm}(\hat r)$$

$$\parallel$$

$$Y_{lm}(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)$$





stati di momento angolare totale

$$\vec{\hat{J}} = \vec{\hat{L}} + \vec{\hat{S}}_1 + \vec{\hat{S}}_2 = \vec{\hat{L}} + \vec{\hat{S}}$$

si ottengono di nuovo con il Clebsch-Gordan

$$\left[Y_\ell(\hat{r})\, \chi_S(1,2) \right]_{JJ_z} = \sum_{m S_z} (\ell m\, S S_z | J J_z)\, Y_{\ell m}(\hat{r})\, \chi_{S S_z}(1,2)$$

$$|\ell - S| \leq J \leq \ell + S$$

Funzione d'onda del deutone $\quad J(\equiv I) = 1$

$$\Psi = \sum_{\ell, S} \frac{R_{\ell S}(r)}{r} \left[Y_\ell(\hat{r})\, \chi_S(1,2) \right]_{\underset{\displaystyle 1}{\overset{\shortparallel}{J}} J_z}$$

R funzioni radiali da calcolare. Per avere J=1

$S = 0 \qquad \ell = 1$

$S = 1 \qquad \ell = 0, 1, 2$

notazione $\quad {}^{2S+1}L_J$

$L=0 \quad S$
$L=1 \quad P$
$L=2 \quad D$
$L=3 \quad F$

Quindi il deutone è una sovrapposizione di 4 onde

$$ {}^3S_1 \quad {}^1P_1 \quad {}^3P_1 \quad {}^3D_1 $$

teniamo conto ora che la forza nucleare <u>conserva la parità</u>. <u>Non</u> ci può essere sovrapposizione di onde pari e dispari

$$ \hat{P}\,\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}) = \Pi\,\psi(\vec{r}) \qquad \Pi = \pm 1 $$

Gli stati nucleari hanno <u>parità definita</u>

$$ \hat{P}^2\psi(\vec{r}) = P\,\Pi\,\psi(\vec{r}) = \Pi^2\psi(\vec{r}) \qquad \Pi^2 = 1 $$

Sperimentalmente la parità del deutone è +
[da $p + n \to {}^2H + \gamma$ studiando la distrib. angolare del γ]

Quindi Deutone $= {}^3S_1 + {}^3D_1$

$$ \Psi = \frac{R_0(r)}{r}\left[Y_0\,\chi_1(1,2)\right]_{1j_z} + \frac{R_2(r)}{r}\left[Y_2\,\chi_1(1,2)\right]_{1j_z} $$

la forma di R_0 e R_2 è determinata dall'interazione nucleare potenziale nucleare $V(1,2)$

$$V(|\vec{r}|, \text{spin})$$

$\uparrow$ solo del modulo della distanza

$\searrow$ operatori che agiscono nelle variabili di spin $\downarrow$ matrici di Pauli

V invariante sotto rotazioni del mom ang tot $\vec{J}$ $\qquad \hat{J}\, V\, \hat{J}^{-1} = +V$

$$\int d\hat{r} \; \{ Y_\ell^* \chi_s^+ \}_{j j_z} \, V(1,2) \, \{ Y_{\ell'} \chi_{s'} \}_{j' j_z'} = V^j_{\ell s, \ell' s'}(r) \, \delta_{j_z j_z'} \, \delta_{j j'}$$

$$V_{\ell s, \ell' s'} = 0 \quad \text{se} \quad (-)^\ell \neq (-)^{\ell'}$$

Eq di Schroedinger per il deutone

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 R_0}{dr^2} + V^1_{01,01}(r) R_0 + V^1_{01,21}(r) R_2 = E R_0 \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(R_2'' - \frac{2(2+1)}{r^2} R_2 \right) + V^1_{21,01} R_0 + V^1_{21,21} R_2 = E R_2 \end{cases}$$

se $V_{01,21} = 0$ le eq di disaccoppiano, e si trovano 2 livelli: ${}^3S_1$ e ${}^3D_1$ distinti

Proprietà generali di $I = \langle J J_z | V | J' J_z' \rangle$

posto che $[H, \vec{J}_{op}] = 0$

- $\langle J J_z | [H, \vec{J}_{op}^{\,2}] | J' J_z' \rangle = 0 =$

$$= \langle J J_z | J^2 V - V J^2 | J' J_z' \rangle$$

$$= J(J+1) \langle J J_z | V | J' J_z' \rangle - J'(J'+1) \langle J J_z | V | J' J_z' \rangle$$

$$= [J(J+1) - J'(J'+1)] \langle J J_z | V | J' J_z' \rangle$$

quindi $\langle J J_z | V | J' J_z' \rangle \neq 0$ solo x $J \neq J'$

Lo stesso ragionamento vale per $J_z = J_z'$ lo provo di

- Ora vediamo che il risultato è indipendente da J_z.

Consideriamo

$$J_+^{op} = J_x^{op} + i J_y^{op}$$

$$J_+^{op} | J J_z \rangle = \alpha | J, J_z + 1 \rangle$$

$$\alpha^2 = \langle J J_z | J_+^{op +} J_+^{op} | J J_z \rangle$$

$$= \langle J J_z | (J_x^{op} - i J_y^{op})(J_x^{op} + i J_y^{op}) | J J_z \rangle$$

$$= \langle J J_z | J_x^{op} J_x^{op} + J_y^{op} J_y^{op} | J J_z \rangle$$

$$= \langle J J_z | J_{op}^2 - J_z^{op\,2} | J J_z \rangle$$

$$= J(J+1) - J_z^2 \qquad \alpha = \sqrt{J(J+1) - J_z^2}$$

ora consideriamo che

$$< JJ_{+1} | V | JJ_{+1} >$$

$$= \left(\frac{J_+^{op} |JJ_+>}{\alpha} \right)^+ V \left(\frac{J_+^{op}}{\alpha} |JJ_+> \right)$$

$$= \frac{1}{|\alpha|^2} < JJ_+ | J_-^{op} V J_+^{op} | JJ_+ >$$

$$= \frac{1}{|\alpha|^2} < JJ_+ | V J_-^{op} J_+^{op} | JJ_+ >$$

$$= < JJ_+ | V | JJ_+ >$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + V(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)\right]\psi(\bar{r}_1,\bar{r}_2) = E\psi(\bar{r}_1,\bar{r}_2)$$

poniamo $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$

$$\bar{R} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\frac{\partial}{r_{1x}} = \frac{\partial r_x}{\partial r_{1x}}\frac{\partial}{\partial r_x} + \frac{\partial R_x}{\partial r_{1x}}\frac{\partial}{\partial R_x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r_x} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial R_x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r_{1x}^2} = \frac{\partial}{\partial r_{1x}}\left(\frac{\partial}{\partial r_x} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial R_x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\frac{\partial^2}{\partial R_x^2} + \frac{2m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial r_x}\frac{\partial}{\partial R_x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r_{2y}} = \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} + \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\frac{\partial}{\partial R_x^2} - \frac{2m_2}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial r_x}\frac{\partial}{\partial R_x}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\left[\nabla_r^2 + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\nabla_R^2 + \cancel{\frac{2m_1}{m_1+m_2}\bar{\nabla}_r\cdot\bar{\nabla}_R}\right] - \frac{\hbar^2}{2m_2}\left(\nabla_r^2 + \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\nabla_R^2 - \cancel{\frac{2m_2}{m_1+m_2}\nabla_r\nabla_R}\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m_1}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2}{(m_1+m_2)^2}\right)\nabla_R^2$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$M = m_1 + m_2$$

Perciò

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2 + V(\bar r)\right]\Psi(\bar r,\bar R) = E\,\Psi(\bar r,\bar R)$$

si cerca $\Psi(\bar r,\bar R) = \psi(\bar r)\, e^{i\bar P\cdot\bar R/\hbar}$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2 + V(r)\right]\psi(\bar r) = \left(E - \frac{P^2}{2M}\right)\psi(\bar r)$$

$$= E_{int}\,\psi(\bar r)$$

Il CM si muove con impulso $\bar P$ che rimane costante nel moto