

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt \quad \text{integrale d'azione}$$

traiettoria $\rightarrow$ minimo di S
per fissi A & B



$$L = L(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \delta \vec{v} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) \delta \vec{r} \right] dt = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0 \right]$$

particella
in un pot. V

$$L =$$

$$\frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V(\vec{r})$$

$$-\vec{\nabla} V - \frac{d}{dt} m \vec{v} = 0$$

$$\frac{d}{dt} m \vec{v} = + (-\vec{\nabla} V) = \vec{F}$$

come si generalizza al caso e.m.?

notazione minimale

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e \varphi$$

usando la formula

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

ricordiamo molto

$$\begin{cases} E = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ B = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

quando calcolo δL $\vec{v}$ e $\vec{A}$ sono variabili indipendenti

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{v} \times \vec{B}$$

molto

$$\frac{d\vec{A}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} L &= \frac{e}{c} \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v}) - e \vec{\nabla} \varphi \\ &= \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} - e \vec{\nabla} \varphi \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d}{dt} \left[m \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} \right]$$

$$= \left(\frac{d}{dt} m \vec{v} \right) + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \frac{e}{c}$$

grund.

$$0 = \cancel{\frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{A}} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} - e \vec{v} \cdot \vec{E} - \left(\frac{d}{dt} m \vec{v} \right) - \cancel{\frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{A}} - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$= \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} + e \vec{E} - \frac{d}{dt} m \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt} m \vec{v} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} + e \vec{E} \quad \parallel \quad \text{o.k.}$$

hamiltoniane

$$H = \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{v}}} - L$$

$$= \bar{\mathbf{v}} \left(m \bar{\mathbf{v}} + \frac{e}{c} \bar{\mathbf{A}} \right) - \frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}}^2 - \frac{e}{c} \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + e \varphi$$

$$= \frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}}^2 + e \varphi$$

tuttavia H deve essere espressa in termini di impulso

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{v}}} = m \bar{\mathbf{v}} + \frac{e}{c} \bar{\mathbf{A}}$$

$$m \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \bar{\mathbf{A}}$$

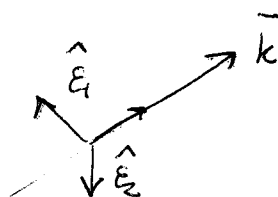
$$H = \frac{1}{2m} \left(\bar{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \bar{\mathbf{A}} \right)^2 + e \varphi \quad ||$$

Emissione & Assorbimento stimolato

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - e \frac{\vec{A}}{c} \right)^2 + e\phi$$

dove $\vec{A}(\vec{x}, t) = 2A_0 \hat{E} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$

Unendo la gauge $\text{div} \vec{A} = 0$ (gauge di radiatione)
 $\vec{k} \cdot \hat{E} = 0$



$\vec{A}$ descrive un'onda fisica che si può scrivere come

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = A_0 \hat{E} \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right]$$

notiamo che $\vec{A}$ è il campo classico che si ricava dall'eq. di Maxwell. In generale dovremo imporre delle condizioni di quantizzazione per $\vec{A}$ ma per ora tratteremo il caso semplice di campo classico.

Notiamo che $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$

$$\begin{aligned} \left(\vec{p} - e \frac{\vec{A}}{c} \right)^2 \psi(\vec{x}, t) &= \\ &= \left(\vec{p} - e \frac{\vec{A}}{c} \right) \left(\vec{p} \psi - e \frac{\vec{A} \psi}{c} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^3 \left(p_i - e \frac{A_i}{c} \right) \left(p_i \psi - e \frac{A_i}{c} \psi \right)$$

8/10

$$= \sum_{i=1}^3 \left(p_i^2 \psi - \frac{e}{c} p_i (A_i \psi) - e \frac{A_i}{c} (p_i \psi) + \frac{e^2}{c^2} A_i^2 \psi \right)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \left(p_i^2 \psi - \frac{e}{c} \left[(p_i A_i) \psi + A_i (p_i \psi) \right] - e \frac{A_i}{c} (p_i \psi) + \frac{e^2}{c^2} A_i^2 \psi \right)$$

$$= \vec{p}^2 \psi + i \hbar \frac{e}{c} (\text{div} \vec{A}) \psi - \frac{2e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{p}) \psi + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2 \psi$$

$$= \left(\vec{p}^2 - 2 \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{p} + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2 \right) \psi$$

considerando $\vec{A}$ come una perturbazione piccola
in genere $\vec{A}^2$ si trascura (da verificare).

$$H = \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})}_{H_0} - \frac{e}{mc} \vec{A} \cdot \vec{p}$$

dove V = potenziale nucleare + coulomb

H_0 = hamiltoniana del modello a shell

$1p_{3/2}$ ———
 $1p_{1/2}$ ———
 $1s_{1/2}$ ———

considera $-\frac{e}{mc} \vec{A} \cdot \vec{p}$

come perturbazione per generare
transizioni tra i vari livelli.

notiamo che

$$V(t)_{\text{pert}} = -\frac{e}{mc} A_0 \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} \hat{\vec{\epsilon}} \cdot \vec{p} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega t} \hat{\vec{\epsilon}} \cdot \vec{p} \right)$$

$$\equiv V_1 e^{i\omega t} + V_2 e^{-i\omega t}$$

$$\begin{cases} V_1 = -\frac{e}{mc} A_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{\vec{\epsilon}} \cdot \vec{p} \\ V_2 = V_1^* \end{cases}$$

$$\langle \phi_n | V_2 | \phi_1 \rangle = \int d^3r \downarrow \phi_n^* \left(-\frac{eA_0}{mc} \right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\vec{\epsilon}} \cdot \vec{p} \phi_0$$

$$\omega_{0 \rightarrow n} = \frac{2\pi}{h} \frac{e^2}{m^2 c^2} |A_0|^2 \left| \langle \phi_n | e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\vec{\epsilon}} \cdot \vec{p} | \phi_0 \rangle \right|^2 \delta(E_n - E_0 - \hbar\omega)$$

approssimazione di dipolo elettrico

$$r \sim fm \quad \text{e} \quad kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1$$

$$(\text{grand. lunghezza d'onda}) \Rightarrow e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \simeq 1$$

$$\text{ora} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{\hbar\omega}{\hbar c} = \frac{E_n - E_0}{\hbar c} \sim \frac{MeV}{200 MeV} \ll 1$$

$$\langle \phi_n | e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{\epsilon} \cdot \vec{p} | \phi_0 \rangle \rightarrow$$

$$\approx \langle \phi_n | \hat{\epsilon} \cdot \vec{p} | \phi_0 \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{so} \quad [x, H_0] &= [x, \frac{p^2}{2m}] \\ &= \frac{1}{2m} [x, p_x^2] \\ &= \frac{1}{2m} \{ p_x [x, p_x] + [x, p_x] p_x \} \\ &= \frac{1}{2m} 2i\hbar p_x \\ &= \frac{i\hbar}{m} p_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | \hat{\epsilon} \cdot \vec{p} | \phi_0 \rangle &= \\ &= \langle \phi_n | \hat{\epsilon} \cdot [\vec{r}, H_0] \phi_0 \rangle \frac{m}{i\hbar} \\ &= \langle \phi_n | \hat{\epsilon} (E_0 - E_n) \vec{r} | \phi_0 \rangle \frac{m}{i\hbar} \\ &= -\hbar\omega \left(\frac{m}{i\hbar} \right) \langle \phi_n | \hat{\epsilon} \cdot \vec{r} | \phi_0 \rangle \\ &= i\omega m \langle \phi_n | \hat{\epsilon} \cdot \vec{r} | \phi_0 \rangle \\ &= i\omega m \hat{\epsilon} \cdot \langle \phi_n | \vec{r} | \phi_0 \rangle \end{aligned}$$

"Approssimazione di dipolo elettrico"