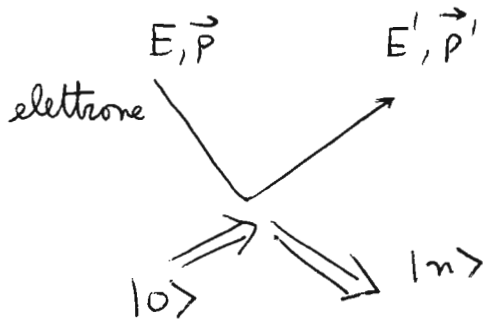


Urti anelastici di elettroni



Consideriamo urti tra elettroni di energia E ed impulso $\vec{p}$ e un sistema di particelle (sistema atomico, nucleare o un adrone) inizialmente nello stato $|0\rangle$ (lo stato fondamentale).

Siano $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n\rangle, \dots$ gli stati possibili del sistema di particelle, autostati dell'energia. Nel loro centro di massa sono $M_0, M_1, \dots, M_n, \dots$ le masse degli stati $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n\rangle, \dots$ ecc ecc.

Da notare che gli stati sono ordinati come $M_0 < M_1 < \dots$. Inoltre, a parte alcuni stati, molti degli stati $|n\rangle$ saranno stati del continuo; per esempio per un sistema atomico, gli stati di alta energia descriveranno l'eccitazione di uno degli elettroni orbitali in uno stato libero ecc.

Terremo conto inoltre della cinematica relativistica: se lo stato $|n\rangle$ si muove nel movimento con un impulso $\vec{P}$, allora l'energia del sistema sarà $\sqrt{(M_n c^2)^2 + P^2 c^2}$.

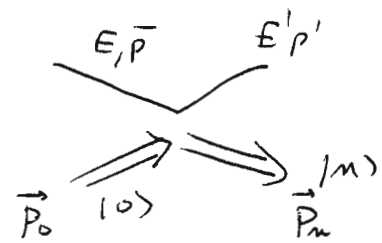
Definizione:

impulso trasferito

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$$

Energia trasferita

$$V = E - E' = \text{energia persa dell'elettrone}$$



Se lo stato $|0\rangle$ era in quiete prima dell'urto, allora

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_n$$

$$\vec{p}_n = \vec{q}$$

$$E + M_0 c^2 = E' + \sqrt{(M_0 c^2)^2 + p_n^2 c^2}$$

$$V + M_0 c^2 = \sqrt{(M_0 c^2)^2 + q^2 c^2}$$

La conservazione dell'energia fornisce M_0 dato V e $\vec{q}$.

- urto elastico

Lo stato del sistema di particelle dopo l'urto è sempre $|0\rangle$, de ora rinculo con impulso $\vec{q}$

$$V + M_0 c^2 = \sqrt{(M_0 c^2)^2 + q^2 c^2}$$

$$V^2 + 2 M_0 c^2 V + (M_0 c^2)^2 = (M_0 c^2)^2 + q^2 c^2$$

$$2 M_0 c^2 V = q^2 c^2 - V^2$$

- Note $2 M_0 c^2 V$ e $q^2 c^2 - V^2$ sono invarianti relativistici

$$q^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) - \left(\frac{E'}{c}, \vec{p}' \right) = \left(\frac{V}{c}, \vec{q} \right)$$

$$q^\mu q_\mu = \frac{V^2}{c^2} - q^2$$

Urti inclusivi

- si conserva solo l'energia diffusoria e si conserva $E, \vec{p}$
- non si conserva niente dello stato finale del sistema di particelle, quindi:

$$d\sigma \propto \sum_n |T_{fi}|^2 \delta(\nu + M_0 c^2 - \sqrt{(M_0 c^2)^2 + q^2 c^2}) d^3 p'$$

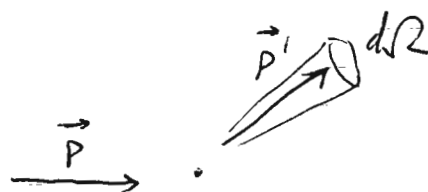
si somma su tutti gli stati finali $|n\rangle$ tali da conservare l'energia. Poiché si conosce $E, \vec{p}$ e $E', \vec{p}'$ si sa che l'urto è avvenuto con

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$$

$$\nu = E - E'$$

Gli elettroni sono relativistici quindi $E \approx pc$
 $E' \approx p'c$

$$\begin{aligned} d^3 p' &\rightarrow p'^2 dp' d\Omega \\ &= \frac{E'^2}{c^3} dE' d\Omega \\ &= \frac{E'^2}{c^3} d\nu d\Omega \end{aligned}$$

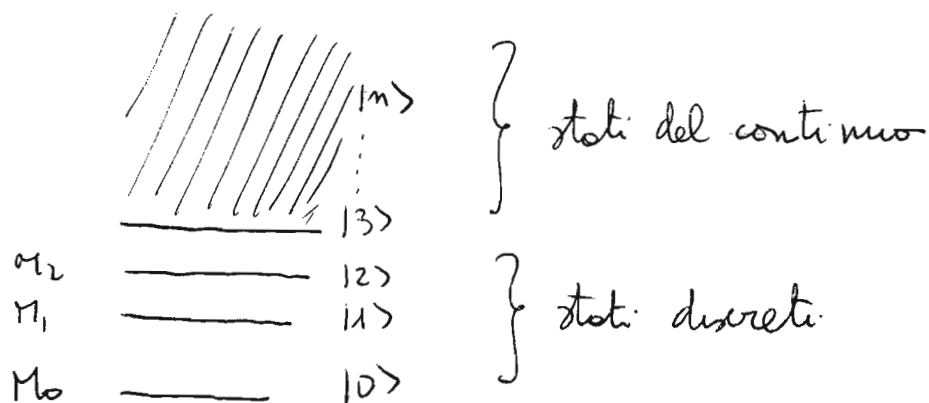


$$\frac{d^2 \sigma}{d\nu d\Omega} \propto \sum_n |T_{fi}|^2 \delta(\nu + M_0 c^2 - \sqrt{(M_0 c^2)^2 + q^2 c^2})$$

↳ numero di reazioni per le quali l'elettrone è stato diffuso nell'angolo solido $d\Omega \equiv d\hat{p}'$ ed ha perso l'energia ν .

In generale per un dato $\vec{q}$ e ν , esiste sempre qualche stato $|n\rangle$ tale da verificare la conservazione dell'energia (eccetto che per i primi stati $|0\rangle, |1\rangle, \dots$)

Esempio: "morse" del sistema ad N particelle

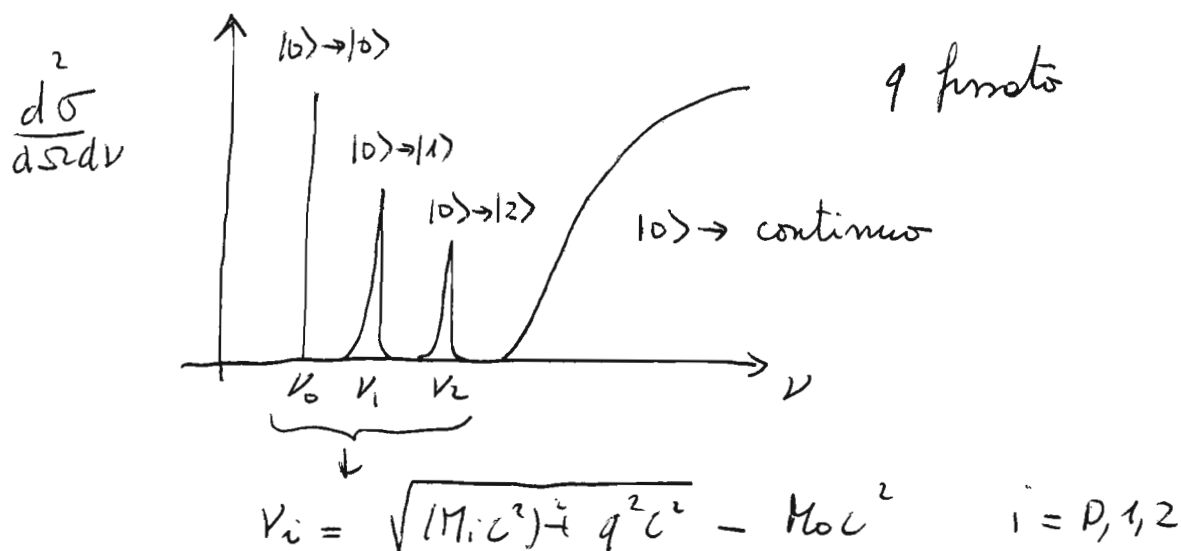


$$\nu + M_0 c^2 = \sqrt{(M_n c^2)^2 + q^2 c^2}$$

$$\nu^2 + 2M_0 c^2 \nu + (M_0 c^2)^2 - q^2 c^2 = (M_n c^2)^2$$

$$M_n c^2 = \sqrt{\nu^2 + 2M_0 c^2 \nu - q^2 c^2 + (M_0 c^2)^2}$$

se q & ν sono tali da produrre stati del continuo, allora trovo $d^2\sigma \neq 0$ perché ho infiniti stati.



Esercizio: perché i picchi $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ e $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ non sono delle "felte"?

Urto profondamente inelastico elettrone protone o elettrone-nucleo

Si studia la sezione d'urto per $q \rightarrow \infty$ e $\nu \rightarrow \infty$
(in pratica $qc \sim \nu \sim \text{GeV}$)

"Bjorken Scaling"

|| per $q \rightarrow \infty$ e $\nu \rightarrow \infty$ la sezione d'urto dipende
|| solo dalla combinazione $\frac{Q^2}{2M_0 c^2 \nu}$ [$Q^2 = q^2 c^2 - \nu^2$]

Urto elettrone - bersaglio d. spin 1/2 - urti inelastici

$$\frac{d^2 \sigma_i}{d\Omega d\nu} = \frac{\alpha^2}{4k^2 m^4 \theta/2} \left[W_2(q, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(q, \nu) m^2 \theta/2 \right]$$

h $k = p$ e W_1 e W_2 sono "funzioni di struttura" - generalizzazione del fattore di forma che dipende solo da q . Per particelle puntiformi:

$$\begin{cases} W_1(q, \nu) = \delta(\nu - \nu_{\text{elast}}) \\ W_2(q, \nu) = \delta(\nu - \nu_{\text{elast}}) \end{cases}$$

dove ν_{elast} verifica $2M_0 c^2 \nu_{\text{elast}} = q^2 c^2 - \nu_{\text{elast}}^2$

$$\nu_{\text{elast}} = \frac{Q^2}{2M_0 c^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q^2 \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{ with } x = Q^2/2M\nu \text{ fixed} \quad (7.18)$$

the structure functions scale as

$$MW_1(Q^2, \nu) \rightarrow F_1(x) \quad (7.19a)$$

$$\nu W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F_2(x). \quad (7.19b)$$

We must emphasise that the *physical* content of Bjorken's hypothesis is that the functions $F_1(x)$ and $F_2(x)$ are *finite*†.

Early experimental support for these predictions (figure 7.2) led initially to an examination of the theoretical basis of Bjorken's argu-

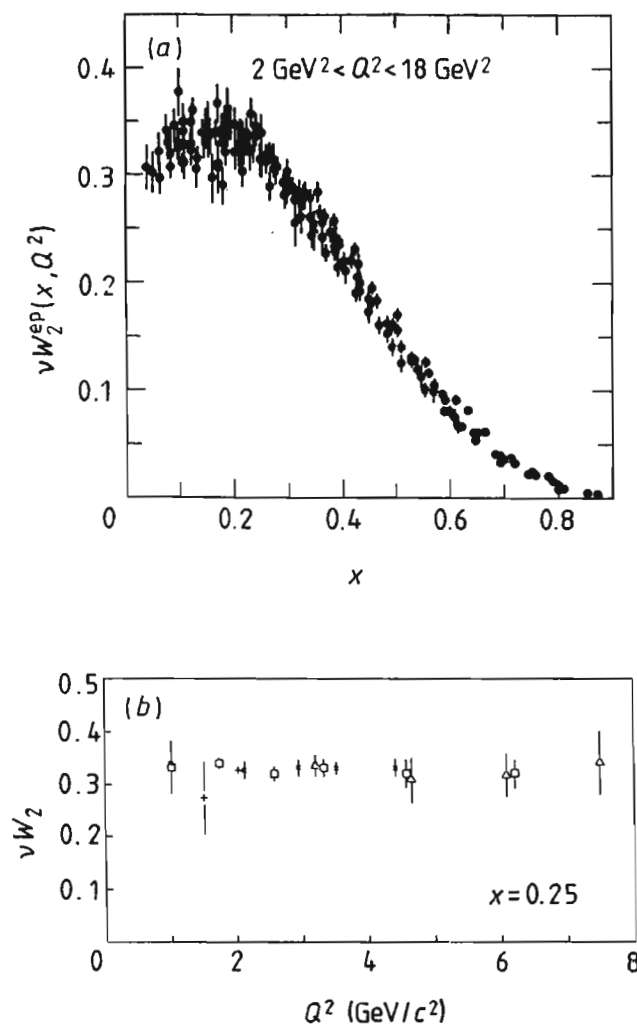
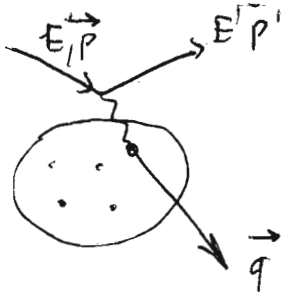


Figure 7.2 Bjorken scaling: the structure function νW_2 (a) plotted against x for different Q^2 values (Attwood 1980) and (b) plotted against Q^2 for the single x value, $x = 0.25$ (Friedman and Kendall 1972).

†It is always possible to write $W(Q^2, \nu) = f(x, Q^2)$, say, where $f(x, Q^2)$ will tend to some function $F(x)$ as $Q^2 \rightarrow \infty$ with x fixed. $F(x)$ may, however, be zero, finite or infinite. The physics lies in the hypothesis that, in this limit, a finite part remains.

Modello a portoni

Supponiamo che per $q, \nu \rightarrow \infty$ l'elettrone veda il sistema come composto da particelle puntiformi non interagenti = "portone"



$$\begin{aligned}\bar{q} &= \bar{p} - \bar{p}' \\ \nu &= E - E' \\ Q^2 &= q^2 c^2 - \nu^2\end{aligned}$$

→ urto elastico elettrone-portone

- massa del portone $\propto M_0$
- inizialmente il portone è fermo

$$E + x M_0 c^2 = E' + \sqrt{(x M_0 c^2)^2 + q^2 c^2}$$

$$\nu + x M_0 c^2 = \sqrt{(x M_0 c^2)^2 + q'^2 c^2}$$

$$\nu^2 + 2x M_0 c^2 \nu + (x M_0 c^2)^2 = (x M_0 c^2)^2 + q'^2 c^2$$

$$2x M_0 c^2 \nu = q'^2 c^2 - \nu^2 = Q^2 \quad \nu = \frac{Q^2}{2 M_0 c^2 x}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \sigma}{d\nu d\Omega} &\propto |T_{fi}|^2 \delta\left(\frac{\nu}{x} - \frac{Q^2}{2 M_0 c^2 x}\right) E'^2 \\ &\propto f\left(\frac{Q^2}{2 M_0 c^2 \nu}\right)\end{aligned}$$

Più precisamente

$$\nu W_2(q, \nu) \rightarrow F_2(x)$$

$$M_0 W_1(q, \nu) \rightarrow F_1(x)$$

$$x = \frac{Q^2}{2 M_0 c^2 \nu}$$

Esempio

e + deutone

deutone = protone + neutrone

$$x \approx \frac{1}{2}$$

Per $q, \nu \rightarrow \infty$ si deve osservare $\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\nu} \propto \delta\left(\frac{1}{2} - \frac{Q^2}{2M_N \nu}\right)$

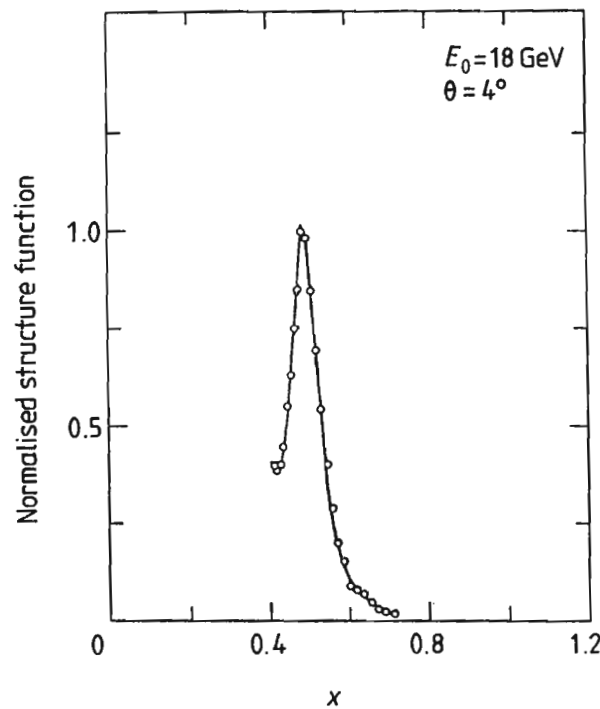


Figure 7.5 Structure function for quasi-elastic e^-d scattering, plotted against x (Attwood 1980).

Per

e + protone

protone = 3 quarks $x \approx \frac{1}{3}$

Non sembra vero (vedi pagina 6)

Pe

In generale, e assumiamo che i portoni siano
i quarks u, d, s poniamo

$u^P(x)$ probabilità di trovare dentro il protone
un quark u di "momento" $/M_0 = x$

$\bar{u}^P(x)$ probabilità di trovare dentro il protone
un antiquark $\bar{u}$ con $momento/M_0 = x$

ecc.

Poiché la sezione d'urto $\propto q_f^2$ dove q_f è la carica
del quark di sapore f , si scrive

$$ep: \nu W_2^{\nu p}(\nu, q) \rightarrow F_2^p(x) = x \left[\frac{4}{9} (u^P(x) + \bar{u}^P(x)) + \frac{1}{9} (d^P(x) + \bar{d}^P(x)) \right. \\ \left. + \frac{1}{9} (s^P(x) + \bar{s}^P(x)) \right]$$

Per un urto elettrone-neutrone

$$\nu W_2^{\nu n}(\nu, q) \rightarrow F_2^n(x) = x \left[\frac{4}{9} (u^n(x) + \bar{u}^n(x)) + \frac{1}{9} (d^n(x) + \bar{d}^n(x)) \right. \\ \left. + \frac{1}{9} (s^n(x) + \bar{s}^n(x)) \right]$$

Tenendo conto che protone: uud
neutrone: ddu

$$\begin{cases} u^P(x) \simeq d^n(x) \equiv u(x) \\ d^P(x) \simeq u^n(x) \equiv d(x) \\ \bar{u}^P(x) \simeq \bar{d}^P(x) \simeq s^P(x) \simeq \bar{s}^P(x) = \bar{u}^n(x) \simeq \bar{d}^n(x) \simeq s^n(x) \simeq \bar{s}^n(x) = \bar{s}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2^P(x) \approx x \left[\frac{4}{9} u(x) + \frac{1}{9} d(x) + \frac{7}{9} S(x) \right] \\ F_2^n(x) \approx x \left[\frac{4}{9} d(x) + \frac{1}{9} u(x) + \frac{7}{9} S(x) \right] \end{cases}$$

$$\frac{F_2^n}{F_2^P} \approx \frac{4d(x) + u(x) + 7S(x)}{4u(x) + d(x) + 7S(x)}$$

Perché $0 \leq u(x), d(x), S(x) \leq 1$ si ricava

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^n}{F_2^P} \leq 4$$

~~molto~~

Per $x \rightarrow 0$, $F_2^n/F_2^P \rightarrow 1$ quindi $d(x), u(x) \rightarrow 0$
 quark di bassa energia $\propto S(x) \rightarrow$ probabilità d.
 trovare un antiquark $\rightarrow$ "mare di coppie $q\bar{q}$ "

$$F_2^P - F_2^n = \frac{x}{3} [u(x) - d(x)]$$

Piccolo a $x \approx 1/3$ come ci si aspettava.

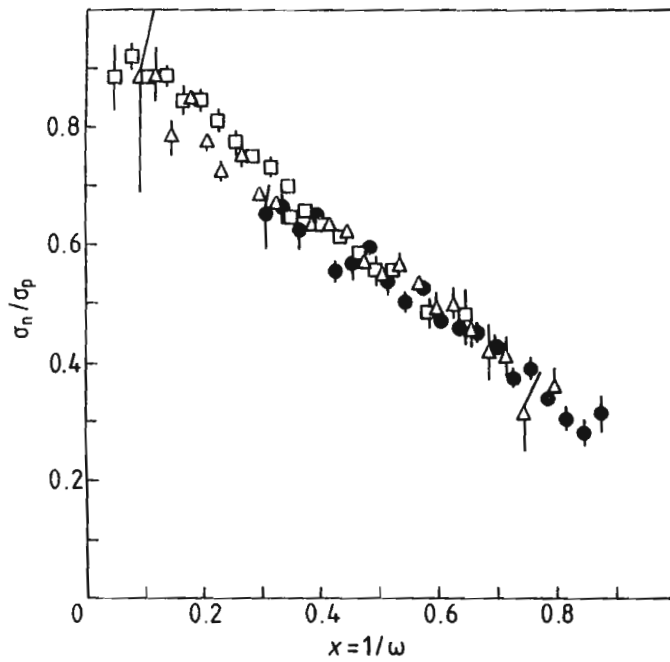


Figure 7.9 The differential cross section σ_n/σ_p versus x (Bodek *et al* 1974). $\bullet$, 15° , 19° , 26° , 34° ; $\triangle$, 18° , 26° , 34° , $\square$, 6° , 10° . If, as the data indicate, σ_S/σ_T is the same for n and p, σ_n/σ_p may be interpreted as F_2^{en}/F_2^{ep} .

contribution dominates. This could then explain why the distribution shown in figure 7.2 differed so considerably from our simplest expectation: perhaps it is the sum of two contributions, one peaked roughly at $x \approx \frac{1}{3}$ (valence) and the other coming in strongly at small x (sea). Such a picture may be at least qualitatively tested by considering the *difference* between the proton and neutron structure functions, from which the sea contribution may be assumed to cancel out. An example of such a distribution is shown in figure 7.10 which does roughly indicate the behaviour expected for the valence quarks. More quantitative separations between quark and antiquark contributions can be made with the help of the neutrino data (cf Chapter 11).

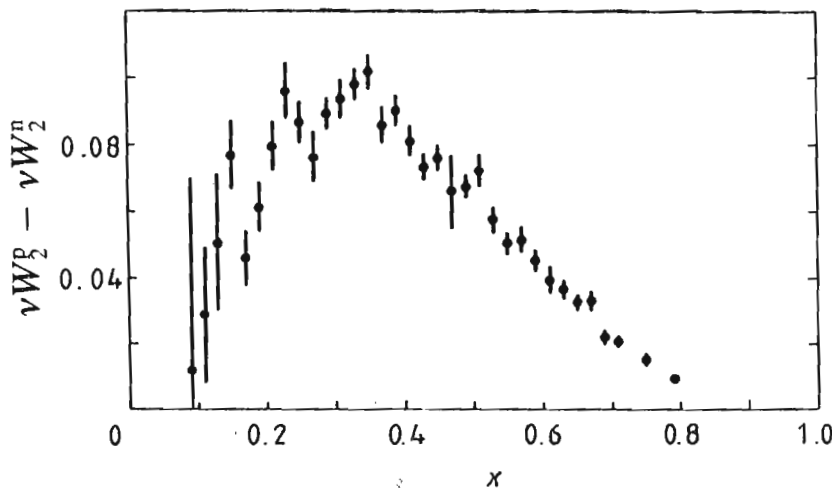


Figure 7.10 $\nu W_2^p - \nu W_2^n$ versus x (Bodek *et al* 1973).